

MAŠINSKI FAKULTET UNIVERZITETA U NIŠU

KALMANOV FILTER

Seminarski rad

Predmetni nastavnik

Dr. Vlastimir Nikolić

Student

Marko Kovandžić

Uvod

Uobičajen način modeliranja fizičkog sistema je njegovo predstavljanje sistemom diferencijalnih jednačina. Da bi matematički model tačno opisivao stanje fizičkog sistema neohodno je ustanoviti koje od veličina su od relevantne a koje nemaju značaj. Često se, međutim, dešava da relevantna promenljiva nije raspoloživa za direktno merenje. U tom slučaju se do nje dolazi posredno, izračunavanjem na osnovu merljivih veličina. Dodatni problem predstavlja činjenica da ponašanje realnog sistema nikada nije potpuno determinističko jer na njega deluju različiti poremećaji (šumovi). Merenje fizičkih veličina, u cilju dobijanja veličina stanja, takođe je zašumljeno i izvesnoj meri nepouzđano. Zbog toga ove veličine zapravo predstavljaju slučajne promenljive što navodi na zaključak da je osim determinističkih za predstavljanje realnih sistema neophodno uvesti i stohastičke diferencijalne jednačine.

Parametri koji figurišu u stohastičkim jednačinama nisu potpuno tačni već predstavljaju aproksimaciju realnih veličina. Kalmanov filter koristi teoriju predviđanja za ekstrakciju nedostupnih veličina stanja dinamičkog sistema iz zašumljenih ili nekompletnih merenja. U matematičkom smislu ovaj filter predstavlja rekursivni postupak kojim se dobija aproksimacija tražene veličine metodom najmanjih kvadrata. Algoritmi koji su se u ovu svrhu koristili pre Kalmanovog za estimaciju stanja sistema u narednom koraku koristili su informacije iz svih predhodnih koraka. Kalmanov metod filtriranja revolucionaran je u tom smislu što upotrebljava merenje samo iz predhodnog koraka za dobijanje a-priori i a-posteriori predviđanja. Ova predviđanja su međusobno su povezana reziltatima novog merenja.



Slika 1. Rudolf Emil Kálmán

Prvi pristup kod modeliranja bilo kog sistema je razmatranje linearnog modela. U skladu sa takvom tendencijom osnovna verzija Kalmanovog algoritma [1] koristi linearnu funkciju za aproksimaciju diskretnih veličina. Ovu verziju algoritma Rudolf E. Kalman objavio je 1960.

godine i od tada, uprkos munjevitom napretku numeričkih postupaka, Kalmanov algoritam nije izgubio na značaju. Osnovni Razlog leži u činjenici da Kalmanov filter omogućava procenu prošlih, sadašnjih pa čak i budućih stanja sistema čak i u odsustvu preciznog matematičkog modela. Kalmanov filter doživio je različite modifikacije koje su proširile oblast njegove primene. Treba istaći Prošireni Kalmanov algoritam, namenjen za ocenu stanja nelinearnih objekata i kontinualni Kalmanov algoritam namenjen kontinualnim sistemima.

Kao optimalni procjenitelj (estimator) i prediktor nepoznate veličine, Kalmanov filter pronašao je veliku primjenu kod digitalnih izračunavanja u sistemima upravljanja, navigaciji, praćenju i predviđanju putanje objekta, robotici...

Teorija procene

Teorija procene je grana statistike koja se bavi dobijanjem procene nepoznatih veličina na osnovu zašumljenih merenja. Svrha procene je dobijanje parametara dinamičkog sistema na osnovu merenja koje sadrže slučajnu komponentu. Skup elemenata sa karakteristikama koje treba odrediti naziva se populacija. Zbog nedostataka resursa (vremena i novca) najčešće nisu poznate vrednosti svih elemenata populacije. U takvom slučaju cilj je pronalaženje reprezentativnog uzoraka (ili podskupa) populacije. Teorija procene polazi od pretpostavke da reprezentativni uzorak sadrži onu količinu elemenata koja obezbeđuje relevantne informacije o procesu odnosno one koje je vredno procenjivati.

Definicija 1. (Slučajna promenljiva) *Slučajna promenljiva X je funkcija koja dodeljuje realan broj, $X(\xi)$, svakom rezultatu ξ u prostoru ishoda slučajnog eksperimenta. $X: S \rightarrow \mathbb{R}$. Opseg vrednosti slučajne promenljive je podskup skupa realnih brojeva.*

Funkcija $X(\xi)$, koja dodeljuje vrednost svakom rezultatu je fiksna i deterministička. Slučajnost posmatrane promenljive X leži u slučajnosti argumenta ξ slučajne funkcije X . Drugim rečima slučajna priroda posmatrane promenljive indukovana je eksperimentom i zbog toga se njena verovatnoća računa u funkciji verovatnoća slučajnih ishoda eksperimenta.

Ponašanje slučajne promenljive vođeno je slučajem, tako da ga možemo predstaviti u funkciji verovatnoće. Slučajna promenljiva je potpuno opisana nalaženjem verovatnoće za svaki od mogućih ishoda eksperimenta.

Osnovna karakteristika slučajne promenljive X je funkcija raspodele verovatnoće (PDF-probability distribution function) $F(x)$, koja je definisana izrazom

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (1)$$

U predhodnoj jednačini, $F(x)$ je funkcija raspodele verovatnoće slučajne promenljive X , a x je neslučajna nezavisna promenljiva ili konstanta. Funkcija gustine raspodele verovatnoće ili

funkcija gustine verovatnoće (pdf – probability density function) $f(x)$ definiše se kao izvod funkcije raspodele verovatnoće

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2)$$

Daleko najrasprostranjenija funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive, u praksi, je Gausova (Karl Fridrih Gaus 1777–1855) ili normalna funkcija gustine verovatnoće koja je definisana izrazom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3)$$

Slučana promenljiva sa ovakvom gustinom raspodele naziva se Gausova ili normalna slučajna promenljiva i označava se skraćeno izrazom $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Funkcija gustine verovatnoće potpuno opisuje ponašanje slučajne promenljive. Na osnovu jednačine (3) ove funkcije očigledno je da je njen oblik određen dvema konstantama, očekivanom vrednosti μ i standardnom devijacijom σ . Zato se svakoj slučajnoj promenljivoj pridružuju ovi parametri. Poznavanje njihovih numeričkih vrednosti daje brz uvid u prirodu slučajne promenljive. U praksi se koriste tri pametara za opisivanje slučajne promenljive: matematičko očekivanje μ , varijansa σ^2 i kovarijansa Σ .

Definicija 2. (Očekivana vrednost) Neka je X realna slučajna promenljiva sa funkcijom gustine raspodele $f(x)$. Očekivana vrednost $\mu = E[X]$ definisana je izrazom

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (4)$$

pod uslovom da je integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx \quad (5)$$

ima konačnu vrednost.

Očekivana vrednost slučajne promenljive X može biti smatrana merom lokacije centra funkcije gustine verovatnoće. Zbog toga se naziva još i sredinom funkcije gustine verovatnoće i označava sa μ ili sa μ_X kada, u prisustvu više slučajnih promenljivih, želimo da istaknemo na koju se slučajnu promenljivu odnosi.

Teorema 1. (Osobine očekivane vrednosti) Neka su X i Y realne slučajne promenljive i $c \in \mathbb{R}$ skalar, onda je

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (6)$$

$$E[cX] = cE[X] \quad (7)$$

Definicija 3. Neka su X i Y nezavisne realne slučajne promenljive sa konačnim očekivanim vrednostima. Tada imamo da je

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (8)$$

Definicija 4. (Varijansa) Neka je X realna slučajna promenljiva sa funkcijom gustine verovatnoće $f(x)$. Varijansa $\sigma^2 = V[X]$ je definisana sa

$$\sigma^2 = V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (9)$$

Teorema 2. (Osobine varijanse) Ako su X i Y realne slučajne promenljive i $c \in \mathbb{R}$ skalar, onda slede jednakosti

- (1) $V[c] = 0$
- (2) $V[cX] = c^2V[X]$
- (3) $V[X + c] = V[X]$ (10)
- (4) Ako su X i Y nezavisne, $V[X + Y] = V[X] + V[Y]$

Definicija 5. (Kovarijansa) Ako razmatramo vektor slučajnih promenljivih

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

gde su $X_1 \dots X_n$ slučajne promenljive sa konačnom variјansom. Onda je matrica kovariјanse Σ čiji je element (i,j) kovariјansa između X_i i X_j , odnosno

$$\Sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \quad (12)$$

gde je $\mu_i = E[X_i]$, očekivana vrednost i -tog elementa vektora \mathbf{X} . U vektorskom obliku ovo možemo predstaviti izrazom

$$\Sigma = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T] = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] = \mu\mu^T \quad (13)$$

Definicija 6. Funkcija generatisa momenta (MGF-moment generating function) slučajne promenljive X definisana je izrazom

$$m(t) = E[e^{tX}] \quad (14)$$

pod uslovom da je matematičko očekivanje definisano.

Gausova funkcija gustine verovatnoće

Predpostavljamo da svi slučajni vektori i procesi koje koristimo u izvođenju Kalmanovog filtera imaju Gausovu raspodelu. U uslovima multivarijabilnog okruženja mogu se definisati sledeći izrazi

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Neka je \mathbf{X} slučajni vektor definisan na \mathbb{R}^n , Gausova (normalna) funkcija gustine verovatnoće data je izrazom

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})} \quad (17)$$

gde je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx_1 \dots dx_n = 1 \quad (18)$$

$$E[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu} \quad (19)$$

matematičko očekivanje slučajnog vektora i

$$E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T] = \boldsymbol{\Sigma} \quad (20)$$

matrica kovarijanse slučajnog vektora. Slično kao u slučaju skalarnih slučajnih promenljivih funkcija gustine verovatnoće kompletno je određena sa dva parametra (matricom matematičkog očekivanja i matricom kovarijanse).

Važna je osobina Gausovih slučajnih vektora je da sabiranje dva (ili) više Gausovih slučajnih vektora daje, takođe, Gausov slučajni vektor sa matematičkim očekivanjem jednakim sumi matematičkih očekivanja i varijansom jednakom sumi varijansi slučajnih vektora sabiraka. Ovo se formalno izražava teoremom

Teorema 3. *Neka su \mathbf{X} i \mathbf{Y} slučajni vektori sa Gausovom (normalnom) raspodelom onda je slučajni vektor $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ takođe ima normalnu raspodelu. Tačnije, ako je $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$ i $\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}_Y, \boldsymbol{\Sigma}_Y)$ i \mathbf{X} i \mathbf{Y} su međusobno nezavisni, onda je $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}_X + \boldsymbol{\mu}_Y, \boldsymbol{\Sigma}_X + \boldsymbol{\Sigma}_Y)$.*

Dokaz. Funkcija generatise momenta sume dveju nezavisnih slučajnih promenljivih X i Y jednaka je proizvodu dve odvojene funkcije generatise momenta ovih promenljivih. Ovo se može predstaviti izrazom

$$m_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX}]E[e^{tY}] = m_X(t)m_Y(t) \quad (21)$$

Za slučajne promenljive $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ možemo definisati funkcije generatosa momenta kao

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad (22)$$

zamenom (22) u (21) dobija se

$$m_{X+Y}(t) = m_X(t)m_Y(t) = e^{\mu_X t - \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}} e^{\mu_Y t - \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}} = e^{(\mu_X + \mu_Y)t - \frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)t^2}{2}} \quad (23)$$

Ovo je funkcija generatosa momenta normalne raspodele sa matematičkim očekivanjem $\mu_X + \mu_Y$ i varijansom $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$. Pošto dve funkcije različitih raspodela nemogu imati istu funkciju generatosa momenta sledi da raspodela $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ mora biti normalna raspodela.

Neka je

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

i

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (25)$$

onda je

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} X_1 + Y_1 \\ \vdots \\ X_n + Y_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

Iz činjenice da očekivanu vrednost vektora slučajnih promenljivih čine očekivane vrednosti svih njegovih komponenti sledi izraz

$$E[\mathbf{X} + \mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} E[X_1 + Y_1] \\ \vdots \\ E[X_n + Y_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[X_1] + E[Y_1] \\ \vdots \\ E[X_n] + E[Y_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{X,1} + \mu_{Y,1} \\ \vdots \\ \mu_{X,n} + \mu_{Y,n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}_X + \boldsymbol{\mu}_Y \quad (27)$$

Na sličan način se može dokazati da je

$$\boldsymbol{\Sigma}_{X+Y} = \boldsymbol{\Sigma}_X + \boldsymbol{\Sigma}_Y \quad (28)$$

Izvođenje ovog izraza dato je u dodatku (A1).

Slučajan process i osobina Markova

Slučajan process predstavlja skup kontinualnih slučajnih promenjivih koje su indeksirane kontinualnim parametrom $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$. Stanje kontinualnih dinamičkih procesa, koji se javljaju bilo u prirodnim bilo u veštačkim sistemima, ne može, nikada, biti potpuno poznato usled uticaja stohastičkih procesa (poremećaja). Zbog toga su ovakve procese možemo smatrati slučajnim procesima. Da bi se dobio kompletan opis slučajnog procesa potrebno je poznavati sve moguće zajedničke funkcije gustine verovatnoće

$$f[\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_N)] \quad (29)$$

za svako t u intervalu (t_0, t_f) , gde se indeks t kreće od 1 do ∞ . Međutim, u praksi nije moguće obezbediti toliko veliku količinu informacija o procesu.

Olakšavajuću okolnost predstavlja činjenica da većina standardnih procesa imaju osobinu Markova (Vladimir Andreevich Markov 1871–1897). Ovakvi procesi su potpuno određeni zajedničkom funkcijom gustine

$$f[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(\tau)] = f[\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(\tau)]f[\mathbf{x}(\tau)] \quad (30)$$

za svako t, τ u intervalu (t_0, t_f) . Drugim rešima uslovna raspodela verovatnoće budućih stanja procesa zavisi jedino od trenutnog stanja sistema a ne zavisi od niza događaja koji ovom stanju predhode. Slučajni procesi koji zadovoljavaju osobinu Markova nazivaju se Markovljevi slučajni procesi.

Definicija 7. (Čisto slučajan proces ili beli šum) U slučaju da je $p[\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(\tau)] = p[\mathbf{x}(t)]$ za svako t i τ u interval (t_0, t_f) proces se naziva čisto slučajan proces ili beli šum. Ako proces uključuje spoljašnji poremećaj $\mathbf{w}(t)$, sa $p[\mathbf{w}(t)|\mathbf{w}(\tau)] \cong p[\mathbf{w}(t)]$ za $|t - \tau| \geq T$, gde je T mnogo manje od prosečnog vremena odziva analiziranog sistema, onda spoljašnji poremećaj $\mathbf{w}(t)$ može biti smatran belim šumom u odnosu na posmatrani sistem.

Gaus-Markov slučajan process je slučajan process koji ima osobinu Markova sa dodatnom restrikcijom da su $p[\mathbf{x}(\tau)]$ i $p[\mathbf{x}(t)|\mathbf{x}(\tau)]$ Gausove funkcije gustine verovatnoće za svako t, τ u intervalu (t_0, t_f) . Zbog toga je funkcija gustine verovatnoće $p[\mathbf{x}(t)]$ Gaus-Markov procesa potpuno određena vektorom matematičkog očekivanja $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}(t)} = E[\mathbf{x}(t)]$ i matricom kovarijanse $Cov_{\mathbf{x}(t)} = [\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}(t)}][\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}(t)}]^T$.

Izuzetan značaj ovakvog tipa procesa proizilazi iz činjenice da većina prirodnih i veštačkih dinamičkih procesa, koji se javljaju u praksi, može biti aproksimirana, sa priličnom tačnošću, uz pomoć Gaus-Markov procesa. Štaviše, veoma je česta praksa aproksimacije procesa koji nije Gaus-Markov upotrebom Gaus-Markov procesa u uslovima ograničenih raspoloživih statističkih podataka.

Estimator na bazi najmanjih kvadrata i Gaus-Markov teorema

Estimator na bazi metode najmanjih kvadrata ili estimator najmanjih kvadrata (LSE – last square estimator) može biti upotrebljen kad god nisu poznati probabilistički podaci o sistemu. Pristup je pretpostaviti model sistema (bolje nego pretpostaviti probabilističke podatke) i postići cilj dizajniranja koristeći pretpostavljeni model. U svrhu izvršenja estimacije koriste se linearni regresioni model.

Definicija 8. *Linearni regresioni model datog skupa podataka $\{Y_i, X_{i1}, \dots, X_{im}\}_{i=1}^n$ polazi od pretpostavke da je veza između zavisne promenljive Y_i i m -dimenzionalnog vektora ulaznih slučajnih promenljivih linearna. Ova linearna veza modelira se uvođenjem člana ϵ_i , neopservabilne slučajne promenljive koja uvodi šum u linearnu vezu između zavisne promenljive i regresora. Tako model dobija oblik*

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_m X_{im} + \epsilon_i = \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (31)$$

gde je $\mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta}$ linearni proizvod između vektora \mathbf{X}_i i $\boldsymbol{\beta}$. Jednačina (31) može biti predstavljena u matičnom obliku

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (32)$$

gde je

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & \dots & X_{nm} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \quad (33)$$

Gaus-Markov teorema govori da kod linearnog regresionog modela, kod koga greške estimacije imaju matematičko očekivanje jednako nuli, nisu u međusobnoj zavisnosti i imaju jednake varijanse, najbolji linearni objektivni estimator (BLUE–best linear unbiased estimator) koeficijentata je običan estimator na bazi metode najmanjih kvadrata. Ovaj estimator je najbolji u smislu najmanje srednje kvadratne greške procene. U formalnom obliku Gaus-Markov teorema ima oblik

Teorema 9. *(Gaus-Markov) Pretpostavimo sledeći linearni regresioni model*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (34)$$

gde je $\boldsymbol{\beta}$ vektor neslučajnih neopservabilnih parametara, \mathbf{X}_{ij} neslučajnan opservabilni vektor, $\boldsymbol{\epsilon}$ vektor slučajnih promenljivih, zbog čega su i \mathbf{Y}_i slučajni vektor. Ako su zadovoljeni uslovi

- (1) $E[\epsilon_i] = 0$, $V[\epsilon_i] = \sigma^2$ i $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ za svako $i \neq j$
 - (2) $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je estimacija vektora $\boldsymbol{\beta}$. Kažemo da je estimator objektivni ako je zadovoljen uslov $E[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = \boldsymbol{\beta}$.
- (35)

(3) Neka je $\sum_{j=1}^m \lambda_j \beta_j$ bilo koja linearna kombinacija koeficijenata, onda je srednje kvadratna greška procene $E[\sum_{j=1}^m \lambda_j (\hat{\beta}_j - \beta_j)]$.

onda je najbolji linearni objektivni estimator vektora β , za svaku kombinaciju linearnih parametara, estimator sa minimalnom srednje kvadratnom greškom. Običan estimator na bazi metode najmanjih kvadrata je funkcija

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (36)$$

za \mathbf{X} i \mathbf{Y} koja minimizira sumu kvadrata ostatka

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{Y}_i - \hat{\mathbf{Y}}_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{Y}_i - \sum_{j=1}^K \hat{\beta}_j \mathbf{Y}_{ij} \right)^2 \quad (37)$$

otuda je običan estimator na bazi metode najmanjih kvadrata najbolji linearni objektivni estimator.

U izvođenju Kalmanovog filtera odnosno rekurzivnog postupka najmanjih kvadrata presudnu ulogu igraju uslovna očekivanja. Neka su \mathbf{X} i \mathbf{Y} slučajni vektori sa zajedničkom raspodelom potpuno određenom momentima prvog i drugog reda. Momenti drugog reda promenljivih \mathbf{X} i \mathbf{Y} definišu se izrazima

$$V[\mathbf{X}] = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - E[\mathbf{X}]E[\mathbf{X}^T] \quad (38)$$

$$V[\mathbf{Y}] = E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T] - E[\mathbf{Y}]E[\mathbf{Y}^T] \quad (39)$$

$$Cov(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = E[\mathbf{Y}\mathbf{X}^T] - E[\mathbf{Y}]E[\mathbf{X}^T] \quad (40)$$

Neka je uslovno očekivanje slučajnog vektora \mathbf{Y} za dato \mathbf{X} linearna funkcija od \mathbf{X}

$$E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}] = \alpha + \mathbf{B}^T \mathbf{X} \quad (41)$$

Cilj je naći vektor α i matricu \mathbf{B} u funkciji momenata drugog reda predstavljenim jednačinama (38-40). Množenjem uslovnog očekivanja marginalnom funkcijom gustine slučajne promenljive \mathbf{X} i integraljenjem po \mathbf{X} dobija se $E[E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}]] = E[\mathbf{Y}]$. Koristeći ovu jednakost u jednačini uslovnog očekivanja (41) dobija se $E[\mathbf{Y}] = \alpha + \mathbf{B}^T E[\mathbf{X}]$ odnosno sledi izraz za α

$$\alpha = E[\mathbf{Y}] - \mathbf{B}^T E[\mathbf{X}] \quad (42)$$

Množenjem uslovnog očekivanja $E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}]$ sa \mathbf{X}^T i marginalnom funkcijom gustine slučajne promenljive \mathbf{X} a onda izračunavanjem matematičkog očekivanja tako dobijenog izraza dobija se jednačina

$$E[\mathbf{Y}\mathbf{X}^T] = \alpha E[\mathbf{X}] + \mathbf{B}^T E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] \quad (43)$$

Množenjem izraza $\alpha + \mathbf{B}^T E[\mathbf{X}]$ sa $E[\mathbf{X}^T]$ dobija se

$$E[\mathbf{Y}]E[\mathbf{X}^T] = \alpha E[\mathbf{X}] + \mathbf{B}^T E[\mathbf{X}]E[\mathbf{X}^T] \quad (44)$$

Oduzimanjem jednačine (38) od jednačine (40) i uz pomoć jednačine momenta drugog reda dobija se jednakost

$$\mathit{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \mathbf{B}^T \mathit{Cov}(\mathbf{X}) \text{ odnosno } \mathbf{B}^T = \mathit{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\mathit{Cov}^{-1}(\mathbf{X}) \quad (45)$$

Zamenom jednačina (42), (38), (45) i (40) u definiciji za $E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}]$ (41) dobija se

$$E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}] = E[\mathbf{Y}] + \mathit{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\mathit{Cov}^{-1}(\mathbf{X})(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) \quad (46)$$

Na osnovu predhodnih izvođenja mogu sumirati izvedene jednačine kao i ostale jednačine [4], koje se mogu izvesti na sličan način, neohpodne za izbođenje rekruzivnog Kalmanovog postupka.

$$E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}] = E[\mathbf{Y}] + \mathit{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\mathit{Cov}^{-1}(\mathbf{X})(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) \quad (47)$$

$$\mathit{Cov}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \mathit{Cov}(\mathbf{Y}) - \mathit{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\mathit{Cov}^{-1}(\mathbf{X})\mathit{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \quad (48)$$

$$E[E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}]] = E[\mathbf{Y}] \quad (49)$$

$$\mathit{Cov}(E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}]) = \mathit{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\mathit{Cov}^{-1}(\mathbf{X})\mathit{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (50)$$

$$\mathit{Cov}(\mathbf{Y}) = \mathit{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) + \mathit{Cov}(E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}]) \quad (51)$$

$$\mathit{Cov}(\mathbf{Y} - E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}], \mathbf{X}) = 0 \quad (52)$$

Dinamika stohastičkog sistema

Kalmanov filter podrazumeva postojanje vremenski diskretnog procesa kojim se upravlja odnosno koji se nadzire. Vremenski diskretan linearan proces, koji nije potpuno deterministički, može biti opisan diferencnom jednačinom stanja

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \quad (53)$$

i diferencnom jednačinom mernog sistema

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}\mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \quad (54)$$

gde je \mathbf{X}_k n -dimenzionalni vektor stanja koji sadrži sve relevantne veličine u koraku k i pomnožen $n \times n$ -dimenzionalnom matricom sistema \mathbf{A} čini deterministički deo jednačine stanja, \mathbf{U}_k je m -dimenzionalni vektor ulaza u koraku k koji pomnožen $n \times m$ -dimenzionalnom matricom ulaza čini nehomogeni deo jednačine stanja, \mathbf{W}_k n -dimenzionalni slučajni vektor

poremećaja (šum objekta) u koraku k koji čini stohastički deo jednačine stanja. Diferencna jednačina mernog sistema pokazuje da je l -dimenzionalni vektor izlaza (merenih veličina) \mathbf{Y}_k takođe jednak zbiru determinističkog i stohastičkog dela. Deterministički deo mernog sistema čini proizvod $l \times n$ -dimenzionalne matrice \mathbf{H} i vektora stanja a stohastički deo l -dimenzionalni vektor \mathbf{V}_k koji predstavlja vektor poremećaja mernog sistema u koraku k . Zbog jednostavnosti izvođenja pretpostavljeno je da su matrice \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{H} vremenski invarijantne mada one u praksi mogu biti promenljive.

Cil Kalmanovog filtriranja je nalaženje vektora stanja \mathbf{X}_k koji nije direkno merljiv na osnovu merljivog vektora izlaza \mathbf{Y}_k . Pri izvođenju filtera smatra se da šumovi objekta \mathbf{W}_k i mernog sistema \mathbf{V}_k predstavljaju međusobno nezavisne slučajne procese sa Gausovom raspodelom koja ima nulto matematičko očekivanje. Ovi slučajni vektori mogu biti simbolički predstavljeni sledećim izrazima

$$\mathbf{W} \sim N(0, Q) \text{ i } \mathbf{V} \sim N(0, R) \quad (55)$$

gde su matrice kovarijanse ova dva vektora definisane izrazima

$$\mathbf{Q} = E[\mathbf{W}\mathbf{W}^T] \text{ i } \mathbf{R} = [\mathbf{V}\mathbf{V}^T] \quad (56)$$

U svrhu izvođenja Kalmanovog filtera treba uvesti pojam Bejsovog pravila ili Bejesove teoreme (Tomas Bejs 1701-1761). Važnost njegovog pristupa je u obezbeđivanju matematičkog pravila koje objašnjava kako treba menjati postojeća ubeđenja u svetlu novih dokaza. Drugim rečima ovaj pristup omogućava istraživačima da kombinuju nove podatke sa postojećim znanjem. Postupak uvodi algoritam predikcije-korekcije koji podrazumeva predviđanje (predikciju) ponašanja sistema u sledećem vremenskom koraku (a-priori procena) i podešavanje (korekciju) ove predikcije na osnovu podataka dobijenih od senzora ili mernih instrumenata kada oni postanu dostupni (a-posteriori procena). Za izvođenje Kalmanovog algoritma, imajući u vidu Bejsov pristup, potrebno je definisati sledeće veličine

$$\hat{\mathbf{X}}_k^- \in \mathbb{R}^n \quad (57)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k \in \mathbb{R}^n \quad (58)$$

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k^- \quad (59)$$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k \quad (60)$$

$$\mathbf{\Sigma}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- (\mathbf{e}_k^-)^T] \quad (61)$$

$$\mathbf{\Sigma}_k = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] \quad (62)$$

gde je $\hat{\mathbf{X}}_k^-$ a-priori ocena stanja u koraku k (što znači da poznajemo ponašanje sistema koje predhodi koraku k), $\hat{\mathbf{X}}_k$ je a-posteriori ocena stanja u koraku k (što podrazumeva poznavanje

rezultata merenja \mathbf{Y}_k), \mathbf{e}_k^- je greška a-priori procene, \mathbf{e}_k je greška a-posteriori procene, $\mathbf{\Sigma}_k^-$ je matrica kovarijanse a-priori greške i $\mathbf{\Sigma}_k$ matrica kovarijanse a-posteriori greške.

Potrebno je naći jednačinu koja izračunava a-posteriori ocenu stanja $\hat{\mathbf{X}}_k$ kao linearnu kombinaciju a-priori ocene stanja $\hat{\mathbf{X}}_k^-$ i razlike između aktuelnog merenja \mathbf{Y}_k i predikcije merenja $\mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_k^-$ pomnožene odgovarajućim koeficijentom \mathbf{K}_k . Ovo se može predstaviti izrazom

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_k^-) \quad (63)$$

U predhodnoj jednačini dve veličine igraju najznačajniju ulogu. Član $\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_k^-$ predstavlja inovaciju merenja ili ostatak i $n \times n$ -dimenzionalna matrica \mathbf{K}_k predstavlja matricu Kalmanovog pojačanja.

Sada treba formulisati algoritam ocene tako da zadovoljava sledeće statističke uslove:

1. Očekivana vrednost estimacije stanja jednaka je očekivanoj vrednosti stvarnog stanja. Što podrazumeva da je, u proseku, ocenjeno stanje jednako stvarnom stanju.
2. Algoritam estimacije minimizira očekivanu vrednost kvadrata greške ocene. Tako da, u proseku, algoritam daje najmanju moguću grešku ocene.

Da bi predhodni uslovi bili zadovoljeni potrebno je identifikovati optimalnu vrednost Kalmanovog pojačanja \mathbf{K}_k .

Teorema 4. *Optimalna vrednost matrice Kalmanovog pojačanja (vrednost koja minimizira kovarijansu greške odnosno omogućava najbolju estimaciju) je*

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (64)$$

Dokaz. Razmotrimo model dinamičkog procesa opisanog jednačinama (53) i (54) sa greškom a-posteriori procene $\mathbf{e}_k = \mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k$. Očekivana vrednost greške data je izrazom

$$E[\mathbf{e}_k] = E[\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k] = E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{V}_k] \quad (65)$$

Primedba. Pošto su \mathbf{K}_k i \mathbf{H} konstantne matrice u svakom koraku, a izvodimo izraz za \mathbf{K}_k , važe sledeće jednakosti

$$\begin{aligned} E[\mathbf{K}_k] &= \mathbf{K}_k \\ E[\mathbf{H}] &= \mathbf{H} \\ [\mathbf{K}_k^T] &= \mathbf{K}_k^T \\ [\mathbf{H}_k^T] &= \mathbf{H}_k^T \end{aligned} \quad (66)$$

zahvljujući kojima jednačina (65) dobija oblik

$$E[\mathbf{e}_k] = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})E[\mathbf{e}_k^-] - \mathbf{K}_k E[\mathbf{V}_k] \quad (67)$$

Iz predhodne jednačine sledi da ako je $E[\mathbf{V}_k] = 0$ i $E[\mathbf{e}_k^-] = 0$ onda je i $E[\mathbf{e}_k] = 0$. Ovo praktično znači da ako šum mernog sistema ima očekivanu vrednost jednaku nuli za svako k , što možemo proveriti iz matematičkog modela sistema, i inicijalnu ocenu stanja sistema podesimo da odgovara njenoj očekivanoj vrednosti $\hat{\mathbf{X}}_0 = E[\mathbf{X}_0]$, onda će očekivana vrednost $\hat{\mathbf{X}}_k$ biti jednaka \mathbf{X}_k za svako k . Zbog toga je estimator stanja sistema objektivna bez obzira na vrednost matrice Kalmanovog pojačanja. Ovim je prvi od gore istaknutih zahteva zadovoljen.

Kriterijum optimalnosti koji se koristi za određivanje matrice \mathbf{K}_k podrazumeva minimizacija ukupne varijanse greške estimacije u koraku k . Neka je M_k ukupna varijansa greške estimacije u koraku k . Onda je

$$M_k = E[\|\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\|^2] = E[\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k] = E[\text{tr}(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T)] = \text{tr}(E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T]) = \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_k) \quad (68)$$

gde je tr trag operator i $\boldsymbol{\Sigma}_k$ je matrica kovarijanse a-posteriori greške. Sada je potrebno odrediti izraz za $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T$, dobiti njegovu očekivanu vrednost i konačno odrediti njen trag.

Korak 1: Treba izvesti izraz za $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T$. Kombinovanjem izraza (60) i (63) dobija se

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T &= ((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{V}_k)((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{V}_k)^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\mathbf{e}_k^- \mathbf{V}_k^T \mathbf{K}_k^T - \\ &\quad - \mathbf{K}_k \mathbf{V}_k \mathbf{e}_k^{-T} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \mathbf{K}_k \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \quad (69)$$

Korak 2: Potrebno je odrediti izraz za očekivanu vrednost od $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T$, odnosno $E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T]$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] &= E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\boldsymbol{\Sigma}_k^- E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T]] - E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\mathbf{e}_k^- \mathbf{V}_k^T \mathbf{K}_k^T] - \\ &\quad - E[\mathbf{K}_k \mathbf{V}_k \mathbf{e}_k^{-T} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T] + E[\mathbf{K}_k \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T \mathbf{K}_k^T] \end{aligned} \quad (70)$$

Primedba. $E[\mathbf{V}_k] = 0$, $E[\mathbf{V}_k^T] = 0$ i \mathbf{V}_k je nezavisna od ostalih članova u jednačini očekivane vrednosti zato što je \mathbf{V}_k definisano kao šum merenja, sa Gausovom gustinom verovatnoće. Zbog toga važe jednakosti $E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\mathbf{e}_k^- \mathbf{V}_k^T \mathbf{K}_k^T] = 0$ i $E[\mathbf{K}_k \mathbf{V}_k \mathbf{e}_k^{-T} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T] = 0$ pa jednačina (70) dobija oblik

$$E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\boldsymbol{\Sigma}_k^- E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T]] + E[\mathbf{K}_k \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T \mathbf{K}_k^T] \quad (71)$$

Korak 3: U cilju minimiziranja matrice $\boldsymbol{\Sigma}_k$, vrši se minimizacija njenog traga odnosno izraza $\text{tr}(E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T])$. Ovo je moguće uraditi diferenciranjem traga u po matrici \mathbf{K}_k . Radi ovoga zamenjujemo \mathbf{K}_k sa $\mathbf{K}_k + t\mathbf{U}$ gde je t skalar a \mathbf{U} direkciona matrica i izvršiti diferenciranje po t u $t = 0$. Tako se dobija sledeći izraz

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_k &= \text{tr}((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T - t(\mathbf{I} \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{U}^T + \mathbf{U} \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T) \\ &\quad + t^2(\dots) + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T + t \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{U}^T + t \mathbf{U} \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T + t^2(\dots)) \end{aligned} \quad (72)$$

Sada treba izvršiti diferenciranje po t u $t = 0$ i izjednačiti dobijeni izraz sa nulom. Ostaće samo linearni članovi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial \mathbf{K}_k} &= -\text{tr}((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{U} \mathbf{H})^T) - \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T) + \\ &\quad + \text{tr}(\mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{U}^T) + \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T) = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

kako je $\text{tr}(\mathbf{A}^T) = \text{tr}(\mathbf{A})$, jer su dijagonale ovih matrica jednake, sledi da je $\text{tr}(\mathbf{U}^T \mathbf{K}_k) = \text{tr}((\mathbf{K}_k^T \mathbf{U})^T) = \text{tr}(\mathbf{K}_k^T \mathbf{U})$. Takođe je, iz istog razloga, $\text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T) = \text{tr}((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{U} \mathbf{H})^T)$. Tako izraz (73) postaje

$$\frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial \mathbf{K}_k} = \text{tr}(-\mathbf{U} \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \mathbf{K}_k^T \mathbf{U} \mathbf{R}) = 0 \quad (74)$$

Pošto je $\mathbf{R} = E[\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T]$ i $\boldsymbol{\Sigma}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- (\mathbf{e}_k^-)^T]$, obe ove matrice su simetrične. Tako je $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$ i $\boldsymbol{\Sigma}_k^{-T} = \boldsymbol{\Sigma}_k^-$. Za simetričnu matricu \mathbf{R} i matrice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} važe izrazi $\text{tr}(\mathbf{R} \mathbf{A}) = \text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{R})^T) = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{R}) = \text{tr}(\mathbf{R}^T \mathbf{A})$ i $\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{A})$. Koristeći ove jednakosti dobija se

$$\frac{\partial \mathbf{M}_k}{\partial \mathbf{K}_k} = \text{tr}((- \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T) \mathbf{U}) = 0 \quad (75)$$

Ima n^2 mogućih varijanti za izbor direkcione matrice $\mathbf{U}_{n \times n}$, koje se razlikuju po poziciji elementa koji ima vrednost 1 (ostali elementi matrice jednaki su nuli). Zbog toga je

$$- \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T = 0 \Leftrightarrow \mathbf{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (76)$$

Na ovaj način izvedeno je optimalno pojačanje koje minimizira kovarijansu greške estimacije odnosno zadovoljen je drugi statistički uslov koji je istaknut na početku izvođenja Kalmanovog algoritma.

Posmatrajmo sada ekstremne slučajeve kada matrica kovarijanse merenja i matrica kovarijanse a-priori greške konvergira nuli

$$\lim_{\mathbf{R}_k \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \quad (77)$$

$$\lim_{\boldsymbol{\Sigma}_k^- \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = 0 \quad (78)$$

u prvom slučaju (77), kada se smanjuje greška merenja, korekcija naglašava rezultat stvarnog merenja jer ono postaje bliže stvarnoj nego simuliranoj vrednosti. U drugom slučaju (78), kada

greška a-priori estimacije teži nuli, pojačanje takođe teži nuli što znači da a priori ocena stanja postaje bliža korigovanoj estimaciji. Drugim riječima, što je predikcija bila bolja, to je potrebno korigovati a priori procenu za manju vrednost.

Algoritam Kalmanovog filtera

Kalmanov filter koristi se za ocenu stanja objekta u određenom vremenskom trenutku. On je napravljen u vidu mehanizma upravljanja sa povratnom spregom i izvršava se u dva koraka. Predikcioni korak algoritma predstavlja vremensko podešavanje ili projekciju ocene stanja iz predhodnog koraka ($k - 1$) na naredni korak (k). Rezultat predikcione faze predstavlja a priori ocenu stanja. U fazi korekcije sistem prima informacije o procesu o kome je postavljena a priori pretpostavka i, na osnovu ovih informacija, vrši njenu korekciju. Rezultat korekcionog koraka naziva se a posteriori ocena. A-posteriori ocena nakon vremenske projekcije postaje a-priori ocena u sledećem koraku.

Jednačine vremenskog podešavanja

$$\hat{\mathbf{X}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{k-1} \quad (79)$$

$$\mathbf{\Sigma}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (80)$$

Jednačine podešavanja na osnovu rezultata merenja

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (81)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_k^-) \quad (82)$$

$$\mathbf{\Sigma}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{\Sigma}_k^- \quad (83)$$

Jednačine (79-83) izvedene su u predhodnom odeljku uz pomoć tehnika minimizacije koje se oslanjaju na matričnu algebru.

Sada je potrebno istražiti da li će rekursivni algoritam obezbediti optimalni estimator stanja procesa odnosno da li će primena jednačina Kalmanovog algoritma uvek rezultovati tačnim estimatorom stanja. U tu svrhu će biti razmotrena još jedna metoda izvođenja Kalmanovog filtera. Prvi način, koji je objašnjen u predhodnom poglavlju, podrazumeva minimizaciju kovarijanse a-posteriori greške. Drugi metod, koji će biti detaljno objašnjen u ovom odeljku, koristi rekursivni postupak estimacije postupkom najmanjih kvadrata i oslanja se na Gauss-Markov teoremu, takođe objašnjenu u predhodnom odeljku. Prema ovoj teremi, rekursivni postupak na bazi metode najmanjih kvadrata obezbediće nalaženje najboljeg objektivnog estimatora (BLUE) svaki put kada su zadovoljeni predviđeni uslovi. Nakon izvođenja filtera drugom metodom upoređićemo rezultate i izvesti zaključke.

Dat je sledeći regresioni model kao model mernog sistema dinamičkog procesa

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}\mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \quad (84)$$

gde je $E[\mathbf{V}_k] = 0$ i $V[\mathbf{V}_k] = \mathbf{R}$ i $Cov(\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_l) = 0$ za $k \neq l$. Takođe je poznato da stanje sistema zadovoljava diferencnu jednačinu

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \quad (85)$$

Kako su pretpostavke Gaus-Markov teoreme zadovoljene estimator za \mathbf{X}_k u svakom koraku će biti najbolji objektivni linearni estimator.

Na osnovu rezultata merenja u koraku k (\mathbf{Y}_k), potrebno je izvesti a-posteriori ocenu $\hat{\mathbf{X}}_k = E[\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_k]$ i $\Sigma_k = Cov(\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_k)$ iz a-priori ocene $\hat{\mathbf{X}}_k^-$ i Σ_k^- . Nakon zamene \mathbf{X} sa \mathbf{Y}_k i \mathbf{Y} sa \mathbf{X}_k u jednačini (47) dobija se

$$E[\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_k] = E[\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_{k-1}] + Cov(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k|\mathbf{Y}_{k-1})Cov^{-1}(\mathbf{Y}_k|\mathbf{Y}_{k-1})(\mathbf{Y}_k - E[\mathbf{Y}_k|\mathbf{Y}_{k-1}]) \quad (86)$$

Elemente jednačine (86), varijansu, varijansu-kovarijansu i grešku predikcije \mathbf{Y}_k na osnovu rezultata raspoloživih posmatranja ili merenja moguće je izraziti na sledeći način

$$Cov(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k|\mathbf{Y}_{k-1}) = E[(\hat{\mathbf{X}}_k - \hat{\mathbf{X}}_k^-)\mathbf{Y}_k^T] = E[(\hat{\mathbf{X}}_k - \hat{\mathbf{X}}_k^-)(\mathbf{H}\mathbf{X}_k)^T] = \Sigma_k^- \mathbf{H} \quad (87)$$

$$Cov(\mathbf{Y}_k|\mathbf{Y}_{k-1}) = Cov(\mathbf{H}(\hat{\mathbf{X}}_k - \hat{\mathbf{X}}_k^-)) + Cov(\mathbf{V}_k) = \mathbf{H}\Sigma_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad (88)$$

$$\mathbf{Y}_k - E[\mathbf{Y}_k|\mathbf{Y}_{k-1}] = \mathbf{Y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_k^- =: \mathbf{F}_k \quad (89)$$

Zamenom jednačina (87-89) u jednačini (47) dobja se

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k^- + \Sigma_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\Sigma_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_k^-) \quad (90)$$

Na sličan način jednačina (48) postaje

$$Cov(\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_k) = Cov(\mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_{k-1}) = Cov(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k|\mathbf{Y}_{k-1})Cov^{-1}(\mathbf{Y}_k, \mathbf{X}_k|\mathbf{Y}_{k-1}) \quad (91)$$

$$\Sigma_k = \Sigma_k^- - \Sigma_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\Sigma_k^- + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H}\Sigma_k^- \quad (92)$$

Sumiranjem predhodnih jednačina, dobijaju se jednačine za korekciju merenja koje se mogu upotrebiti za pokretanje rekurzivnog algoritma

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{Y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_k^- \quad \text{ostatak} \quad (93)$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}\Sigma_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad \text{kovarijansa greške} \quad (94)$$

$$\mathbf{K}_k = \Sigma_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{S}_k \quad \text{pojačanje filtera} \quad (95)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{F}_k \quad \text{ocena parametara} \quad (96)$$

$$\mathbf{\Sigma}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{\Sigma}_k^- \quad \text{kovarijansa estimacije} \quad (97)$$

Faza predikcije ostaje nepromenjena u odnosu na način objašnjen u prehodnom odeljku, pošto ona ne zavisi od metode izvođenja. Ova faza podrazumeva a-priori ocene i kovarijansu greške uz pomoć matematičkog modela sistema. Ovim je kompletiran skup jednačina za predikciju i korakciju

Faza predikcije / Vremensko podešavanje

$$\hat{\mathbf{X}}_k^- = \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{U}_{k-1} \quad (98)$$

$$\mathbf{\Sigma}_k^- = \mathbf{A} \mathbf{\Sigma}_{k-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (99)$$

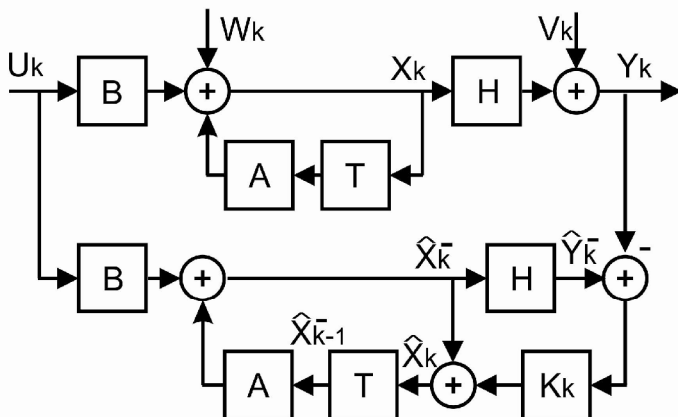
Faza korekcije / Podešavanje na osnovu merenja

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{\Sigma}_k^- \mathbf{H}^T \mathbf{S}_k \quad \text{pojačanje filtera} \quad (100)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{F}_k \quad \text{ocena parametara} \quad (101)$$

$$\mathbf{\Sigma}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{\Sigma}_k^- \quad \text{kovarijansa estimacije} \quad (102)$$

Rezultati dobijeni upotrebom dva optimizaciona metoda za dobijanje Kalmanovog pojačanja se podudaraju. Zbog toga je algoritam Kalmanovog filtera izveden pomoću ove dve metode optimalan, pod uslovom da su zadovoljeni predviđeni uslovi. U prvom slučaju pristup problemu je minimizacija a-posteriori kovarijanse greške na osnovu uslova prvog reda. Izvod kovarijanse greške po pojačanju izjednačava se sa nulom nakon čega se rešavanjem jednačine po pojačanju dobija njegova optimalna vrednost. Drugi metod, koji se bazira na pretpostavci Gaus-Markov teoreme, daje zaključak da je estimator dobijen pomoću izračunatog Kalmanovog pojačanja najbolji objektivni linearni estimator. Činjenica da se pomoću dve veoma različite metode dobija isti rezultat ukazuje da se za predpostavljeni model dobija najbolji estimator stanja sistema u svakom koraku.



Slika 2. Blok dijagram diskretnog Kalmanovog filtera

Na sici 2 prikazan je blok dijagram predictor-korektor mehanizma koji konstituše Kalmanov filter. Oznake koje se pojavljuju u blok dijagramu odgovaraju oznakama koje se javljaju u jednačinama Kalmanovog algoritma (79-83) a oznaka T označava vremensko kašnjenje između dva uzastopna koraka. Čitav dijagram odgovara vremenskom i podešavanju na osnovu merenja koje se vrši u svakom koraku koraku Kalmanovog filtera.

Prošireni Kalmanov filter

Razmotrimo nelinearni sistem, opisan diferencnom jednačinom stanja

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{U}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1} \quad (103)$$

i diferencnom jednačinom mernog sistema

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{V}_k \quad (104)$$

gde su \mathbf{X}_{k-1} , \mathbf{X}_k n -dimenzionalni vektori stanja sistema u dva uzastopna koraka $k - 1$, k , \mathbf{f} je n -dimenzionalna nelinearna prelazna vektorska funkcija sistema, \mathbf{h} je m -dimenzionalna nelinearna opservaciona vektorska funkcija sistema, \mathbf{U}_k je m -dimenzionalni vektor upravljačkih veličina, $\mathbf{W}_k \sim N(0, \mathbf{Q}_k)$ je n -dimenzionalni vektor šuma objekta i $\mathbf{V}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$ m -dimenzionalni vektor šuma mernog sistema, oba sa normalnom raspodelom koja ima matematičko očekivanje jednako nuli. Matrica \mathbf{Q}_k predstavlja kovarijansu šuma objekta a matrica \mathbf{R}_k kovarijansu šuma mernog sistema. Početno stanje dato je slučajnim vektorom sa poznatim očekivanjem $\boldsymbol{\mu}_0 = E[\mathbf{X}_0]$ i kovarijansom $\boldsymbol{\Sigma}_0 = E[(\mathbf{X}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{X}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)^T]$.

Ako su zadovoljeni pomenuti uslovi mogu se napisati jednačine

$$E[\mathbf{W}_k] = 0 \quad E[\mathbf{W}_k \mathbf{W}_k^T] = \mathbf{Q}_k \quad E[\mathbf{W}_k \mathbf{W}_j^T] = 0 \quad \forall k \neq j \quad E[\mathbf{W}_k \mathbf{X}_0^T] = 0 \quad \forall k \quad (105)$$

$$E[\mathbf{V}_k] = 0 \quad E[\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T] = \mathbf{R}_k \quad E[\mathbf{V}_k \mathbf{V}_j^T] = 0 \quad \forall k \neq j \quad E[\mathbf{V}_k \mathbf{X}_0^T] = 0 \quad \forall k \quad (106)$$

Iz činjenice da su vektori \mathbf{W}_k i \mathbf{V}_k međusobno nezavisni sledi jednakost

$$E[\mathbf{W}_k \mathbf{V}_j^T] = 0 \quad \forall k \wedge \forall j \quad (107)$$

Predpostavljamo, tkođe, da vektorske funkcije \mathbf{f} i \mathbf{h} pripadaju takozvanim C^1 funkcijama odnosno da su neprekidne i imaju neprekidan prvi izvod na posmatranom domenu.

Pošto su nelinearnosti objekta i mernog sistema glatke, možemo razviti vektorske funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{X}_k)$ i $\mathbf{h}(\mathbf{X}_k)$ u Tejlorov red i na ovaj način aproksimirati prognozu i sledeću ocenu vektora \mathbf{X}_k .

Inicijalno, pošto su jedine dostupne informacije matematičko očekivanje $\boldsymbol{\mu}_0$ i kovarijansa $\boldsymbol{\Sigma}_0$ početnog stanja, inicijalna ocena stanja i kovarijansa greške imaju oblik

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = \boldsymbol{\mu}_0 = E[\mathbf{X}_0] \quad (108)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = E[(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)^T] \quad (109)$$

Predpostavimo da imamo optimalnu ocenu stanja $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^- \equiv E[\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}]$ sa kovarijansom $\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}$ u koraku $k - 1$. Predikcioni deo \mathbf{X}_k dat je izrazom

$$\hat{\mathbf{X}}_k^- = E[\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_{k-1}] = E[\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}] = E[\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) | \mathbf{Y}_{k-1}] \quad (110)$$

Razvijanjem vektorske funkcije \mathbf{f} u Tejlorov red u okolini $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ dobija se

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) \equiv \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) + \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1})(\mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}) + C.V.R. \quad (111)$$

gde je \mathbf{J}_f jakobijan funkcije \mathbf{f} koji je definisan izrazom

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (112)$$

gde je $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = (f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_n(\mathbf{X}))^T$ i $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a člana višeg reda (C.V.R.) može se smatrati zanemarljivim. Otuda se prošireni kalmanov filter naziva još i filter prvog reda. Jednačina (111) postaje

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) + \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1})\mathbf{e}_{k-1} \quad (113)$$

gde je $\mathbf{e}_{k-1} \equiv \mathbf{X}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{k-1}$. Očekivana vrednost funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1})$ uslovljena izlazom \mathbf{Y}_{k-1} data je izrazom

$$E[\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) | \mathbf{Y}_{k-1}] \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) + \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1})E[\mathbf{e}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}] \quad (114)$$

gde je $E[\mathbf{e}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}] = 0$. Na osnovu ovoga a priori procena stanja \mathbf{X}_k je

$$\hat{\mathbf{X}}_k^- \approx \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) \quad (115)$$

Zamena jednačine (113) u jednačini a priori greške (59) daje

$$\mathbf{e}_k^- \equiv \mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k^- = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) \approx \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1})\mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \quad (116)$$

a kovarijansa a priori greške data je izrazom

$$\begin{aligned}
\Sigma_k^- &\equiv E[\mathbf{e}_k^-(\mathbf{e}_k^-)^T] \\
&= \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1})E[\mathbf{e}_{k-1}(\mathbf{e}_{k-1})^T]\mathbf{J}_f^T(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) + E[\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T] \\
&= \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1})\Sigma_{k-1}\mathbf{J}_f^T(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) + \mathbf{Q}_{k-1}
\end{aligned} \tag{117}$$

U koraku k raspoložive veličine su a priori procena $\hat{\mathbf{X}}_k^-$ sa kovarijansom Σ_k^- i merenje \mathbf{Y}_k sa kovarijansom \mathbf{R}_k . Cilj je dobijanje najbolje objektivne procene $\hat{\mathbf{X}}_k$ vektora stanja \mathbf{X}_k . Jedan od načina je da pretpostavimo ocenu kao linearnu kombinaciju a priori procene $\hat{\mathbf{X}}_k^-$ i merenja \mathbf{Y}_k odnosno u obliku

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{a} + \mathbf{K}_k \mathbf{Y}_k \tag{118}$$

Iz uslova objektivnosti sledi

$$\begin{aligned}
0 &\equiv E[\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k | \mathbf{Y}_k] \\
&= E[(\hat{\mathbf{X}}_k^- + \mathbf{e}_k^-) - (\mathbf{a} + \mathbf{K}_k \mathbf{h}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{K}_k \mathbf{V}_k) | \mathbf{Y}_k] \\
&= \hat{\mathbf{X}}_k^- - \mathbf{a} - \mathbf{K}_k E[\mathbf{h}(\mathbf{X}_k) | \mathbf{Y}_k]
\end{aligned} \tag{119}$$

dakle

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{X}}_k^- - \mathbf{K}_k E[\mathbf{h}(\mathbf{X}_k) | \mathbf{Y}_k] \tag{120}$$

Zamenom predhodne jednačine u jednačini (118) dobija se

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k^- - \mathbf{K}_k (\mathbf{Y}_k - E[\mathbf{h}(\mathbf{X}_k) | \mathbf{Y}_k]) \tag{121}$$

Razvijajući izraz za vektorsku jednačinu \mathbf{h} u Tejlorov red, slično kao u slučaju a priori procene, u okolini $\hat{\mathbf{X}}_k^-$ dobija se

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}_k) \equiv \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k^-) + \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-)(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k^-) + C.V.R. \tag{122}$$

gde je \mathbf{J}_h Jakobijan vektorske funkcije \mathbf{h} koji je definisan izrazom

$$\mathbf{J}_h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{123}$$

gde je $\mathbf{h}(\mathbf{X}) = (h_1(\mathbf{X}), h_2(\mathbf{X}), \dots, h_n(\mathbf{X}))^T$ i $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ a član višeg reda (C.V.R.) može se smatrati zanemarljivim. Matematičko očekivanje obe strane jednačine (122) pod uslovom \mathbf{Y}_k daje

$$E[\mathbf{h}(\mathbf{X}_k) | \mathbf{Y}_k] \approx \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k^-) + \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-)E[\mathbf{e}_k^- | \mathbf{Y}_k] \tag{124}$$

Pošto je $E[\mathbf{e}_k | \mathbf{Y}_k] = 0$ zamenom predhodog izraza u jednačina (121) dobija se

$$\hat{\mathbf{X}}_k \approx \hat{\mathbf{X}}_k^- - \mathbf{K}_k (\mathbf{Y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k^-)) \quad (125)$$

Greška a posteriori procene data je izrazom

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k &\equiv \mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1} - \hat{\mathbf{X}}_k^- - \mathbf{K}_k (\mathbf{Y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k^-)) \\ &\approx \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^-) + \mathbf{W}_{k-1} - \mathbf{K}_k (\mathbf{h}(\mathbf{X}_k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k^-) + \mathbf{V}_k) \\ &\approx \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^-) \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} - \mathbf{K}_k (\mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \mathbf{e}_k + \mathbf{V}_k) \\ &\approx \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^-) \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) (\mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^-) \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1}) - \mathbf{K}_k \mathbf{V}_k \\ &\approx (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-)) \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^-) \mathbf{e}_{k-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-)) \mathbf{W}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{V}_k \end{aligned} \quad (126)$$

Pa je kovarijansa greške nove procene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_k &\equiv [\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-)) \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^-) \boldsymbol{\Sigma}_{k-1} \mathbf{J}_f^T(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}^-) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-))^T \\ &\quad + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-)) \mathbf{Q}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-))^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-)) \boldsymbol{\Sigma}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-))^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \boldsymbol{\Sigma}_k^- - \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k^T \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \quad (127)$$

Kovarijansa greške nove procene važi za svako \mathbf{K}_k . Kao kod standardnog Kalmanovog filtera \mathbf{K}_k nalazimo minimizirajući $tr(\boldsymbol{\Sigma}_k)$ u odnosu na \mathbf{K}_k , odnosno

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial tr(\boldsymbol{\Sigma}_k)}{\partial \mathbf{K}_k} \\ &= -(\mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \boldsymbol{\Sigma}_k^-)^T - \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) + 2\mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) + 2\mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (128)$$

Odakle je Kalmanovo pojačanje

$$\mathbf{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) (\mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (129)$$

Zamenom jednačinu (129) u (127) dobija se

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_k &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \right) \boldsymbol{\Sigma}_k^- - \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \right) \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \right) \boldsymbol{\Sigma}_k^- - \left(\boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \right) \mathbf{K}_k^T \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \right) \boldsymbol{\Sigma}_k^- - \left[\boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) - \mathbf{K}_k \left(\mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) + \mathbf{R}_k \right) \right] \mathbf{K}_k^T \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \right) \boldsymbol{\Sigma}_k^- - \left[\boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) - \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \right] \mathbf{K}_k^T \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \right) \boldsymbol{\Sigma}_k^-
\end{aligned} \tag{130}$$

Ovim su izvedene sve potrebne jednačine za definisanje proširenog Kalmanovog algoritma.

Algoritam proširenog Kalmanovog filtera

Ako je jednačina nelinearnog sistema

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1} \tag{131}$$

jednačina opservacije

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{V}_k \tag{132}$$

inicijalno stanje dato je formulom

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \boldsymbol{\mu}_0 \tag{133}$$

sa kovarijansom greške $\boldsymbol{\Sigma}_0$. A priori procena stanja (predictor) određena je izrazima

$$\hat{\mathbf{X}}_k^- \approx \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}) \tag{134}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^- = \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) \boldsymbol{\Sigma}_{k-1} \mathbf{J}_f^T(\hat{\mathbf{X}}_{k-1}) + \mathbf{Q}_{k-1} \tag{135}$$

i a posteriori procena stanja (korektor) određena je izrazima

$$\mathbf{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \left(\mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \boldsymbol{\Sigma}_k^- \mathbf{J}_h^T(\hat{\mathbf{X}}_k^-) + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \tag{136}$$

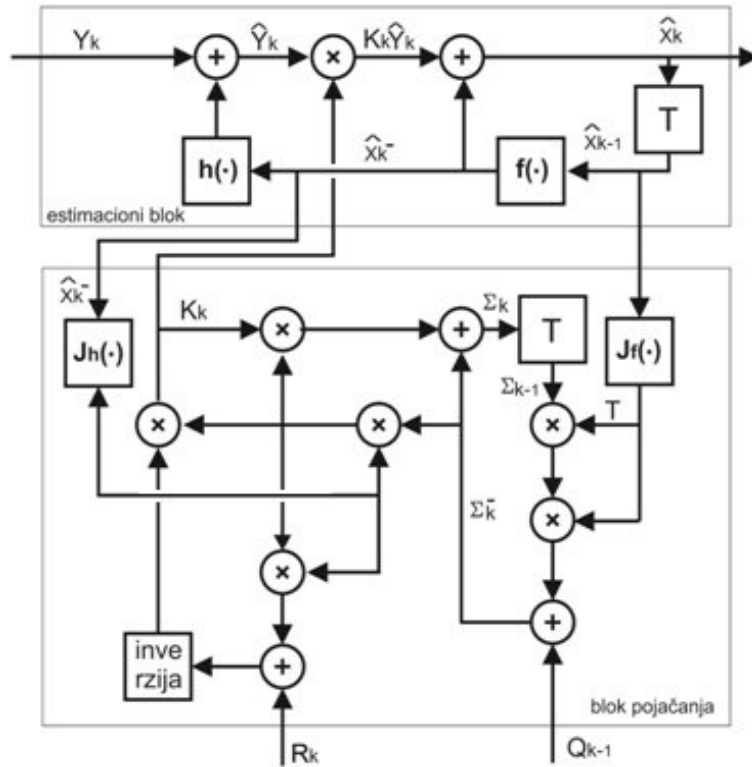
$$\hat{\mathbf{X}}_k \approx \hat{\mathbf{X}}_k^- - \mathbf{K}_k (\mathbf{Y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k^-)) \tag{137}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-) \right) \boldsymbol{\Sigma}_k^- \tag{138}$$

Potrebno je još odrediti pod kojim uslovima je prošireni Kalmanov algoritam stabilan. Pošto su \mathbf{Q}_k i \mathbf{R}_k simetrične pozitivno definitne matrice važe jednakosti

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^T \tag{139}$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^T \tag{140}$$



Slika 3. Blok dijagram proširenog Kalmanovog filtera

Ako u jednačinama (111) i (122) sa φ i χ označimo članove višeg reda dobijamo izraze

$$f(\mathbf{X}_k) - f(\hat{\mathbf{X}}_k) = J_f(\hat{\mathbf{X}}_k)\mathbf{e}_k + \varphi(\mathbf{X}_k, \hat{\mathbf{X}}_k) \quad (141)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}_k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_k) = J_h(\hat{\mathbf{X}}_k)\mathbf{e}_k + \chi(\mathbf{X}_k, \hat{\mathbf{X}}_k) \quad (142)$$

Moguće je dokazati da je greška estimacije ograničena ako važe uslovi

1. Ako su $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ pozitivni realni brojevi i za svako k važi

$$\|J_f(\hat{\mathbf{X}}_k)\| \leq \alpha \quad (143)$$

$$\|J_h(\hat{\mathbf{X}}_k)\| \leq \beta \quad (144)$$

$$\gamma_1 \mathbf{I} \leq \Sigma_k \leq \gamma_2 \mathbf{I} \quad (145)$$

2. J_f je nesingularno za svako k
3. Postoje pozitivni realni brojevi $\epsilon_\varphi, \epsilon_\chi, \kappa_\varphi, \kappa_\chi > 0$ takvi da su nelinearne funkcije φ i χ ograničene izrazima

$$\|\varphi(\mathbf{X}_k, \hat{\mathbf{X}}_k)\| \leq \epsilon_\varphi \|\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\|^2 \text{ sa } \|\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\| \leq \kappa_\varphi \quad (146)$$

$$\|\chi(\mathbf{X}_k, \hat{\mathbf{X}}_k)\| \leq \epsilon_\chi \|\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\|^2 \text{ sa } \|\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_k\| \leq \kappa_\chi \quad (147)$$

Onda je greška estimacije \mathbf{e}_k ograničena tako da važi jednakosti

$$\|\mathbf{e}_k\| \leq \epsilon \quad (148)$$

a matrice kovarijanse stohastičkih članova ograničene sa

$$\mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^T \leq \delta \mathbf{I} \quad (149)$$

$$\mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^T \leq \delta \mathbf{I} \quad (150)$$

za neke vrednosti parametara ϵ i $\delta > 0$.

Iterativni prošireni Kalmanov filter

Kod proširenog Kalmanovog filtera vektorska funkcija \mathbf{h} se linearizuje u okolini a priori stanja $\hat{\mathbf{X}}_k^-$. Iterativni prošireni Kalmanov filter uvodi iterativno izračunavanje a posteriori stanja u cilju unapređenja linearizacije na taj način što se ona vrši u okolini poslednje procene stanja. Ovo se postiže iterativnim izračunavanjem veličina $\hat{\mathbf{X}}_k$, \mathbf{K}_k i Σ_k u svakom koraku. Ako, na primer, sa $\hat{\mathbf{X}}_{k,i}$ označimo a posteriori ocenu u vremenskom trenutku k za i -tu iteraciju onda su iterativne jednačine a posteriori estimacije

$$\mathbf{K}_{k,i} = \Sigma_k^- J_h^T(\hat{\mathbf{X}}_{k,i}^-) (J_h(\hat{\mathbf{X}}_{k,i}^-) \Sigma_k^- J_h^T(\hat{\mathbf{X}}_{k,i}^-) + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (151)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k,i} \approx \hat{\mathbf{X}}_k^- - \mathbf{K}_{k,i} (\mathbf{Y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}_{k,i}^-)) \quad (152)$$

$$\Sigma_{k,i} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k,i} J_h(\hat{\mathbf{X}}_k^-)) \Sigma_k^- \quad (153)$$

Jednačine a priori procene stanja ostaju iste kao u slučaju proširenog Kalmanovog algoritma. Iterativni postupak izračunavanja a posteriori stanja započinje se sa $\hat{\mathbf{X}}_{k,0} = \hat{\mathbf{X}}_k^-$ i ponavlja se sve do momenta kada promena stanja između dve uzastopne iteracije postane neznatna.

Prednost iterativnog proširenog Kalmanovog algoritma je veća tačnost a mana duže vreme izračunavanja.

Kontinualni Kalmanov filter

Ako razmotrimo kontinualni homogeni linearan sistem sa jednačinom stanja

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{W}(t) \quad (154)$$

i jednačinom izlaza

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t) \quad (155)$$

gde su $\mathbf{W}(t)$ i $\mathbf{V}(t)$ beli šumovi posmatranog procesa i mernog sistema respektivno. Zbog jednostavnosti izvođenja pretpostavićemo, u daljem tekstu, da su matrice $\mathbf{A}_{n \times n}$, $\mathbf{B}_{n \times m}$ i $\mathbf{H}_{l \times n}$ vremenski invarijantne mada one u praksi mogu biti promenljive. Još jedna važna pretpostavka je da su šumovi procesa i mernog sistema međusobno nezavisne.

Na osnovu pretpostavki možemo pisati izraze

$$E[\mathbf{W}(t_1)\mathbf{W}(t_2)^T] = \mathbf{Q}\delta(t_1 - t_2) \quad (156)$$

$$E[\mathbf{V}(t_1)\mathbf{V}(t_2)^T] = \mathbf{R}\delta(t_1 - t_2) \quad (157)$$

$$E[\mathbf{W}(t)\mathbf{V}(t)^T] = 0 \quad (158)$$

Kovarijansa greške estimacije u vremenskom trenutku t definisana je izrazom

$$\boldsymbol{\Sigma} = E[\mathbf{e} \mathbf{e}^T] \quad (159)$$

gde je

$$\mathbf{e} = \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}} \quad (160)$$

greška estimacije u vremenskom trenutku t . Diferenciranjem greške estimacije imajući u vidu jednakosti (154-155) dobijamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{X}} - \dot{\hat{\mathbf{X}}} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{W} - [\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{K}(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}})] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{W} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{K}(\mathbf{H}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{V}) - \mathbf{K}\mathbf{H}\hat{\mathbf{X}} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{H})(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) + \mathbf{W} - \mathbf{K}\mathbf{V} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{e} + \mathbf{W} - \mathbf{K}\mathbf{V} \end{aligned} \quad (161)$$

Na osnovu predhodnog, kovarijansu greške estimacije možemo predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Sigma}}(t) &= \frac{d}{dt}[\mathbf{e} \mathbf{e}^T] \\ &= E[\dot{\mathbf{e}} \mathbf{e} + \mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}^T] \\ &= E[(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{e} \mathbf{e}^T] + E[(\mathbf{W} - \mathbf{K}\mathbf{V})\mathbf{e}(t)^T] \\ &\quad + E[\mathbf{e} \mathbf{e}^T(\mathbf{A}^T - \mathbf{H}^T\mathbf{K}^T)] + E[\mathbf{e}(\mathbf{W}^T - \mathbf{V}^T\mathbf{K}^T)] \end{aligned} \quad (162)$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine (161) dobijamo jednakost

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{H})t} \mathbf{e}(0) + \int_0^t e^{(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{H})(t-\tau)} (\mathbf{W}(\tau)^T - \mathbf{V}(\tau)^T \mathbf{K}^T) d\tau \quad (163)$$

na osnovu koje sledi

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{e}(t)(\mathbf{W}(t) - \mathbf{K}\mathbf{V}(t))] &= e^{(A-\mathbf{K}\mathbf{H})t} E[\mathbf{e}(0)(\mathbf{W}(t) - \mathbf{K}\mathbf{V}(t))] \\
&+ \int_0^t e^{(A-\mathbf{K}\mathbf{H})(t-\tau)} E[(\mathbf{W}(\tau) - \mathbf{K}\mathbf{V}(\tau))(\mathbf{W}(\tau)^T - \mathbf{V}(\tau)^T \mathbf{K}^T)] d\tau \\
&= \int_0^t e^{(A-\mathbf{K}\mathbf{H})(t-\tau)} (\mathbf{Q}\delta(t-\tau) + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T \delta(t-\tau)) d\tau \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{Q} + \frac{1}{2} \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T
\end{aligned} \tag{164}$$

Prvi član jednačine (163) eliminisan je jer ne postoji korelacija između inicijalnog uslova $\mathbf{e}(0)$ i izraza $\mathbf{W}^T - \mathbf{V}^T \mathbf{K}^T$. Drugi red dobijen je koriscenjem uslova da ne postoji korelacija između poremećaja na objektu i poremećaja na mernom sistemu (158). Poslednja relacija dobijena je na osnovu osobine impulsne funkcije

$$\int_0^t \delta(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \tag{165}$$

jer granice ovog integral obuhvataju samo polovinu jediničnog impulsa. Izvedeni član (164) je simetričan što znači da je $E[\mathbf{e}(t)(\mathbf{W}(t) - \mathbf{K}\mathbf{V}(t))] = E[(\mathbf{W}(t) - \mathbf{K}\mathbf{V}(t))\mathbf{e}(t)^T]$ odnosno ovaj izraz se u jednačini (162) pojavljuje dva puta. Na osnovu predhodnog konačan izraz za izvod kovarijanse greške dobija oblik

$$\dot{\Sigma} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{H})\Sigma + \Sigma(\mathbf{A}^T - \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T \tag{166}$$

Ovaj izraz ne zavisi od greške estimacije ali zavisi od, za sada još uvek nepoznate, vrednosti Kalmanovog pojačanja \mathbf{K} .

Pošto je $\Sigma(t)$ simetrična, pozitivna i semidefinitna matrica njene sopstvene vrednosti su realne i nenegativne. U takvom slučaju malim sopstvenim vrednostima matrice kovarijanse greške odgovara mala greška estimacije. Zbog toga, biramo matricu Kalmanovog pojačanja tako da minimizira sopstvene vrednosti matrice kovarijanse greške. Na osnovu definicije traga matrice kovarijanse greške

$$tr(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tag{167}$$

gde je $tr(\Sigma)$ trag matrice Σ , a λ_i njene sopstvene vrednosti, očigledno je da se minimiziranjem $tr(\Sigma)$ postiže minimizacija kovarijanse greške estimacije. Na osnovu ovoga sledi da se nalaženje Kalmanovog pojačanja može izvršiti minimiziranjem traga matrice kovarijanse greške.

U praksi se isti problem rešava optimizacijom funkcije

$$J = tr(\Sigma\mathbf{W} + \Lambda\mathbf{F}) \tag{168}$$

Gde je F $n \times n$ -dimenzionalna nula matrica a Λ $n \times n$ -dimenzionalna Lagranžovih množioica. Ovi množioici predstavljaju mehanizam za uvođenje granica u proces optimizacije. U konkretnom slučaju, granice će biti uvedene u obliku jednačine (166)

$$J = tr(\Sigma W + \Lambda(\dot{\Sigma} - (A - KH)\Sigma + \Sigma(A^T - H^T K^T) + Q + K R K^T)) \quad (169)$$

Potrebno je odrediti optimalno K za koje predhodna funkcija ima minimalnu vrednost. Ovo ćemo postići izjednačavanjem izvoda funkcije J sa nulom. Da bi našli vrednost izoda upotrebićemo sledeće jednakosti

$$\frac{\partial}{\partial K} tr(-\Lambda K H \Sigma) = -\Lambda^T \Sigma H^T \quad (170)$$

$$\frac{\partial}{\partial K} tr(-\Lambda \Sigma H^T K^T) = -\Lambda \Sigma H^T \quad (171)$$

$$\frac{\partial}{\partial K} tr(\Lambda K R K^T) = \Lambda^T K R + \Lambda K R \quad (172)$$

Dokazi tvrđenja (170-171) dati su u dodatku (A2-A3) a tvrđenje (172) se izvodi na osnovu tvrđenja (170-171). Na osnovu predhodnih jednačina možemo pisati

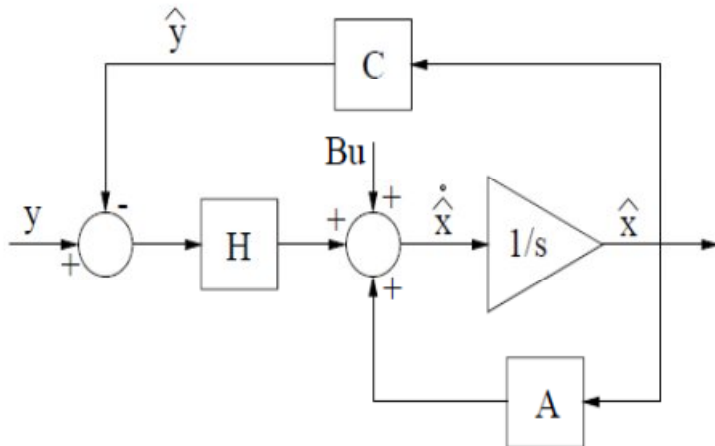
$$\frac{\partial}{\partial K} = 2\Lambda(-\Sigma H^T + K R) = \mathbf{0} \quad (173)$$

odakle dobijamo optimalnu vrednost Kalmanovog pojačanja

$$K = \Sigma H^T R^{-1} \quad (174)$$

Zamenom ove vrednosti u izraz za matricu kovarijanse greške (165) dobijamo

$$\dot{\Sigma}(t) = A \Sigma + \Sigma A^T + Q - \Sigma H^T R^{-1} H \Sigma \quad (175)$$



Slika 4. Blok dijagram kontinualnog Kalmanovog filtera

Algoritam kontinualnog Kalmanovog filtera

Ako je jednačina homogenog linearnog sistema

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{W}(t) \quad (176)$$

i jednačina opservacije

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{X}(t) + \mathbf{V} \quad (177)$$

inicijalno stanje dato je izrazazom

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \text{ i } \boldsymbol{\Sigma}(0) = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad (178)$$

onda je predikcioni deo filtera određen izrazima

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\Sigma}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{K}^T(t) \end{aligned} \quad (179)$$

a korekcionni deo

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}(t)[\mathbf{Y}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{X}}(t)] \\ \mathbf{K}(t) &= \boldsymbol{\Sigma}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t) \end{aligned} \quad (180)$$

Treba primetiti da je za rešavanje jednačine stanja neophodno rešenje jednačine merenja i obrnuto. Zbog toga se kontinualni Kalmanov filter ne implementira putem kompjuterskog programa, ali se koristi kao moćno sredstvo na teoretskom polju filtriranja.

Primena Kalmanovog filtera

Kalmanov filter se može upotrebiti za ocenu stanja širokog opsega procesa. Osim što predstavlja izuzetno sredstvo za praktičnu upotrebu ovaj filter je značajan sa teoretske tačke gledišta zbog svoje osobine da minimizira varijansu greške estimacije.

Primer 1.

Jedna od najčešćih primena Kalmanovog filtera je za određivanje kordinata objekta u prostoru. Ovo možemo ilustrovati na primeru kosog hica odnosno objekta koji je izbačen nekom početnom brzinom i kreće se pod uticajem gravitacionog polja. Za određivanje pozicije, u prisustvu šuma na objektu i šuma na mernom sistemu, upotrebićemo Kalmanov filter. Vektor stanja ($\vec{s} = (\vec{p}, \vec{v})$) čine dvodimenzionalni vektori pozicije i brzine a, pošto je upotreba filtera postavkom zadatka

ograničena na estimaciju pozicije, vektor izlaza jednak je vektoru pozicije \vec{p} . Matematički model objekta određen je diferencijalnim jednačinama

$$\vec{s} = \begin{cases} \dot{\vec{p}} = \vec{v}_0 + \vec{v}t \\ \dot{\vec{v}} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \end{cases} \quad (181)$$

koje nakon diskretizacije daju sledeće diferencne jednačine

$$\vec{s} = \begin{cases} \vec{p}(t+1) = \vec{p}(t) + \delta t \cdot \vec{v}(t) \\ \vec{v}(t+1) = \vec{v}(t) + \delta t \cdot \vec{g} \end{cases} \quad (182)$$

Ako usvojimo pravougli referentni sistem sa koordinatama x i y onda je matematički model sistema u prostoru stanja

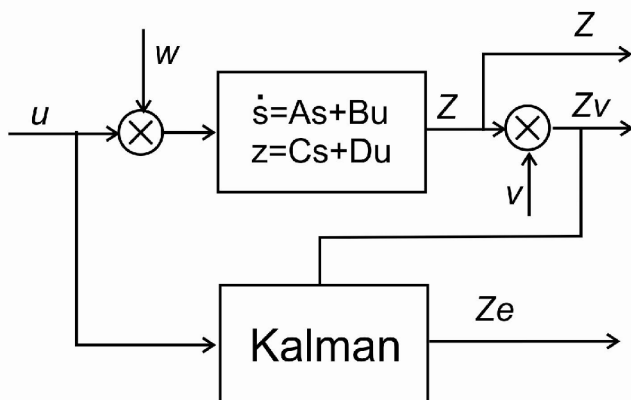
$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \dot{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \cdot \delta t \end{bmatrix} + \vec{w}_k \quad (183)$$

$$\vec{z}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{bmatrix} + \vec{v}_k$$

U konkretnom slučaju početna brzina će biti $v_0 = 8 \frac{m}{s}$ a ugao $\alpha_0 = 45$ pa vektor početnog stanja ima oblik

$$\vec{s}(0) = [v_0 \cos \alpha_0 \quad v_0 \sin \alpha_0 \quad 1 \quad 1]^T \quad (184)$$

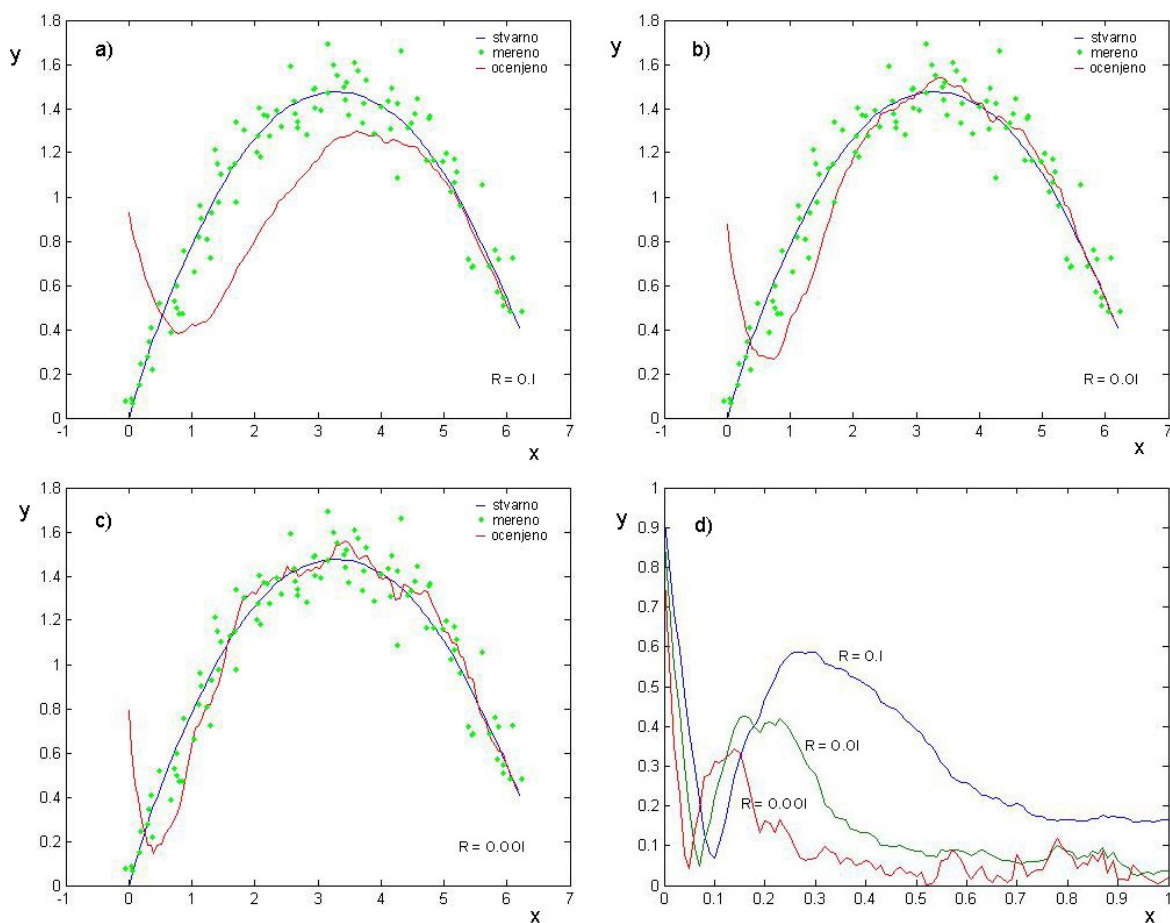
Na slici 5. prikazani su rezultati simulacije ovakvog sistema koji su dobijeni primenom Matlab koda (dodatak B). Da bi simultano uporedili stvarni izlaz, izlaz na mernom instrumentu i estimaciju dobijemnu Kalmanovim filterom izvršićemo sintezu sistema sa blok dijagramom na slici 5.



Slika 6. Blok dijagram sistema upotrebljenog za simulaciju Kalmanovog filtera upotrebljenog za estimaciju pozicije kosog hica

Pošto su diferencne jednačine za x i y pravac nezavisne simulacija sistema je izvršena dekompozicijom sistema na dva nezavisna sistema sa po dve veličine stanja od kojih se jedan odnosi na x a drugi na y pravac kordinatnog sistema. Observacija se vrši u trajanju od jedne sekunde pri čemu so rezultati zagađeni slučajnim poremećajem na mernom instrumentu u vidu belog šuma.

Na slici 6. prikazani su rezultati simulacije za kovarijansu šuma na objektu $Q = 1$ i tri različite kovarijanse šuma mernog sistema. Prvi slučaj (sl. 6a) i odgovarajuća greška na poslednjem grafiku (sl. 6d) navode na zaključak da za vrednost kovarijanse mernog sistema $R = 0,1$ sistem konvergira sporo. Ovo je slučaj kada se ne daje na značaju rezultatima merenja tako da oni malo utiču na približavanje estimacije stvarnoj vrednosti. Kod drugog slučaja (sl. 6b), gde je $R = 0,01$, povećava se brzina konvergencije sistema. Napokon, kod trećeg slučaja (sl. 6c), gde je kovarijansa greške mernog sistema izuzetno mala $R = 0,001$, dolazi do brze konvergencije procenjenog stanja ka stvarnoj vrednosti. U ovom slučaju je dat veliki značaj rezultatima merenja tako da estimacija osciluje prateći vrednost slučajne promenljive.



Slika 6. Simulacija primene Kalmanovog filtera za određivanje položaja objekta izbačenog u gravitacionom polju: a) $R=0,1$, b) $R=0,01$ i c) $R=0,001$; d) uporedni prikaz greške estimacije za navedena tri slučaja

Primer 2.

Primenu proširenog Kalmanovog filtera ilustrovaćemo na primeru estimacije pozicije i brzine dvofaznog sinhronog koračnog motora sa permanentnim magnetom na osnovu raspoloživih vrednosti struja na namotajima. Diferencijalne jednačine koje opisuju rad motora imaju oblik

$$\begin{aligned} \dot{I}_a &= -\frac{R}{L}I_a + \frac{\omega\lambda}{L}\sin\theta + \frac{u_a + w_a}{L} \\ \dot{I}_b &= -\frac{R}{L}I_b + \frac{\omega\lambda}{L}\cos\theta + \frac{u_b + w_b}{L} \\ \dot{\omega} &= -\frac{3\lambda}{2J}I_a\sin\theta + \frac{3\lambda}{2J}I_b\sin\theta - \frac{F\omega}{J} + w_\alpha \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (185)$$

u kojima su promenljive I_a i I_b struje u namotajima motora, θ je ugaona pozicija motora, ω ugaona brzina motora, R otpor namotaja, L induktivnost namotaja, λ konstanta fluksa, F koeficijent viskoznog trenja koji deluje na motor i teret, J moment inercije motora i tereta, u_a i u_b naponi na namotajima i w_α šum koji potiče od neizvesnosti obrtnog momenta tereta. Na osnovu diferencijalnih jednačina možemo definisati vektor stanja

$$x = [I_a \quad I_b \quad \omega \quad \theta]^T \quad (186)$$

Nakon diskretizacije dobijamo diferencne jednačine stanja

$$x_{k+1} = x_k + \begin{bmatrix} -\frac{R}{L}I_a + \frac{\omega\lambda}{L}\sin\theta + \frac{u_a}{L} \\ -\frac{R}{L}I_b + \frac{\omega\lambda}{L}\cos\theta + \frac{u_b}{L} \\ -\frac{3\lambda}{2J}I_a\sin\theta + \frac{3\lambda}{2J}I_b\sin\theta - \frac{F\omega}{J} \\ \omega \end{bmatrix} \Delta t + \begin{bmatrix} \frac{w_a}{L} \\ \frac{w_b}{L} \\ \frac{w_\alpha}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (187)$$

Stanje objekta određujemo na osnovu merenja struje na namotajima pa je jednačina izlaza

$$y = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} \quad (188)$$

gde su v_a i v_b šumovi mernog sistema. Jakobijeva matrica vektorske funkcije prelaza stanja ima oblik

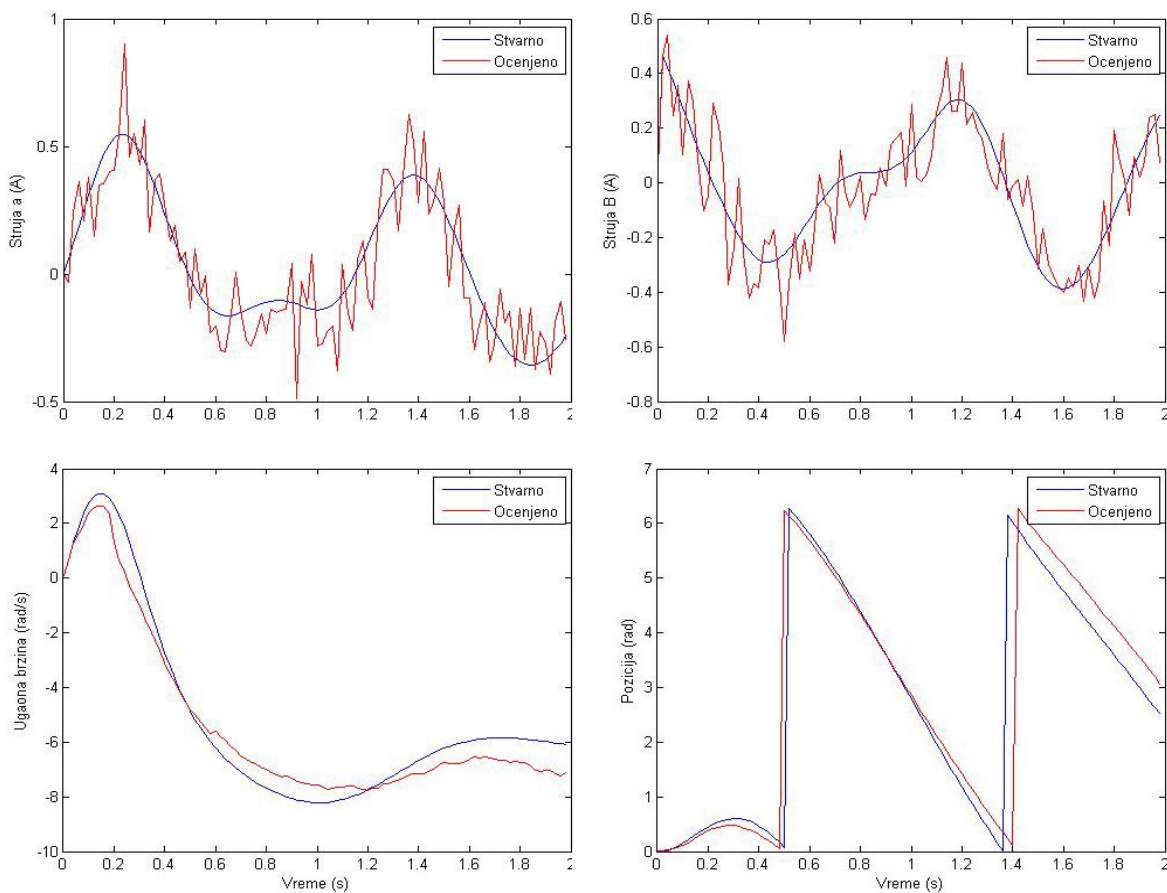
$$J_f = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & \frac{\lambda}{L} \sin\theta & \frac{\omega\lambda}{L} \cos\theta \\ 0 & -\frac{R}{L} & \frac{\lambda}{L} \cos\theta & -\frac{\omega\lambda}{L} \sin\theta \\ -\frac{3\lambda}{2J} \sin\theta & \frac{3\lambda}{2J} \cos\theta & -\frac{F}{J} & -\frac{3\lambda}{2J} I_a \cos\theta + \frac{3\lambda}{2J} I_b \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (188)$$

Upravljački signal motora dat je dvema sinusnim funkcijama koje su pomerene u fazi

$$\begin{aligned} u_a(t) &= \sin 2\pi t \\ u_b(t) &= \cos 2\pi t \end{aligned} \quad (189)$$

Odnosno u diskretnom obliku

$$\begin{aligned} u_{ak} &= \sin 2\pi k \Delta t \\ u_{bk} &= \cos 2\pi k \Delta t \end{aligned} \quad (190)$$



Slika 7. Simulacija proširenog Kalmanovog filtera za određivanje pozicije i brzine dvofaznog sinhronog motora sa permanentnim magnetom

Na slici 7. prikazani su rezultati simulacije opisanog sistema primenom Matlab koda (Dodatak C) u trajanju od dve sekunde. Prilikom simulacije usvojene su vrednosti standardne devijacije ulaznih signala $w_a = w_b = 0,001As$ i vrednost standardne devijacije šuma na obrtnom momentu motora $w_\alpha = 0,05rad/s^2$. Na gornjim slikama predstavljene su stvarne i ocenjene vrednosti struje za oba namotaja sinhronog koračnog motora sa permanentnim magnetom. Treća slika predstavlja primenu stvarne i ocenjene vrednosti ugaonog ubrzanja ovog motora u zavisnosti od vremena a četvrta predstavlja promenu stvarne i ocenjene vrednosti pozicije rotora u zavisnosti od vremena. Rezultati merenja sastoje se od vrednosti struja u dva namotaja motora. Međutim rezultati izvršene simulacije pokazuju da se primenom proširenog Kalmanovog filtera i ostale veličine stanja (pozicija i brzina) mogu oceniti sa zadovoljavajućom tačnošću.

Treba naglasiti da se, u slučaju linearnog sistema primenjuje isključivo linearan Kalmanov filter. Prošireni Kalmanov algoritam primenjuje se samo kada je to apsolutno neophodno tj. u slučaju da je objekat observacije izrazito nelinearan.

Literatura

- [1] Rudolf E Kálmán, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Research Institute for Advanced Study, Baltimore, Maryland, USA, 1960.
- [2] Samprit Chatterjee and Ali S. Hadi, *Regression Analysis by Example*, John Wiley & Sons, 2006.
- [3] Peter Maorters and Yuval Peres, *Brownian Motion*, University of Cambridge, Great Britain, 2008.
- [4] Irina Cazan, *Kalman Filters*, Colby College, Waterville, Maine, USA, 2011.
- [5] Shoudong Huang, *Extended Kalman Filter*, ARC Centre of Excellence for Autonomous Systems (CAS), Faculty of Engineering and Information Technology University of Technology Sydney, Australia 2010.
- [6] Zoltán Szabó, Peter S. C. Heuberger, József Bokor, Paul M. J. Van den Hof, *Extended Ho-Kalman algorithm for systems represented in generalized orthonormal bases*, Computer and Automation Research Institute, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, 2000.
- [7] Greg Welch, Gary Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, Department of Computer Science University of North Carolina, North Carolina, USA, 1997.
- [8] A. Ferreiro, *Kalman Filtering*, University of Glasgow, Great Britain,
- [9] N. Shimkin, *Estimation and Identification in Dynamical Systems*, Israel Institute of Technology, Department of Electrical Engineering, Israel, 2009.
- [10] Gabriel A. Terejanu, *Extended Kalman Filter Tutorial*, Department of Computer Science and Engineering University at Buffalo, Buffalo, New York, USA
- [11] Vlastimir Nikolić, Žarko Čojbašić, Danijela Pajović, *Automatsko upravljanje-analiza sistema*, Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu, 1996.
- [12] Ljiljana Petković, *Numerička analiza*, Mašinski fakultet Univerziteta u Nišu, 2003.
- [13] Leonie Freeston, *Applications of the Kalman Filter Algorithm to Robot Localisation and World Modelling*, Electrical Engineering Final Year Project University of Newcastle, NSW, Australia

Dodatak A

1. Izvođenje izraza za kovarijansu zbira dva slučajna vektora

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} &= E[(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^T] - (\mu_{\mathbf{X}} + \mu_{\mathbf{Y}})(\mu_{\mathbf{X}} + \mu_{\mathbf{Y}})^T \\
&= E[(X_1 + Y_1)^2 + \dots + (X_n + Y_n)^2](\mu_{\mathbf{X}} + \mu_{\mathbf{Y}})(\mu_{\mathbf{X}} + \mu_{\mathbf{Y}})^T \\
&= E[(X_1^2 + \dots + X_n^2) + (Y_1^2 + \dots + Y_n^2)] + 2E[X_1Y_1 + \dots + X_nY_n] - \\
&\quad - \left((\mu_{X,1} + \mu_{Y,1})^2 + \dots + (\mu_{X,n} + \mu_{Y,n})^2 \right) \\
&= E[(X_1^2 + \dots + X_n^2) + (Y_1^2 + \dots + Y_n^2)] + 2E[X_1Y_1 + \dots + X_nY_n] - \\
&\quad - \left((\mu_{X,1}^2 + \dots + \mu_{X,n}^2) + (\mu_{Y,1}^2 + \dots + \mu_{Y,n}^2) + 2(\mu_{X,1}\mu_{Y,1} + \dots + \mu_{X,n}\mu_{Y,n}) \right) \\
&= E[(X_1^2 + \dots + X_n^2)] - (\mu_{X,1}^2 + \dots + \mu_{X,n}^2) + E[(Y_1^2 + \dots + Y_n^2)] - (\mu_{Y,1}^2 + \dots + \mu_{Y,n}^2) \\
&= \Sigma_{\mathbf{X}} + \Sigma_{\mathbf{Y}}
\end{aligned} \tag{A1}$$

2. Dokaz tvrđenja $\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \text{tr}(-\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{\Sigma}) = -\mathbf{A}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{H}^T$

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{B}) = \text{tr} \left[\sum_{j=1}^n A_{ij} \sum_{k=1}^l K_{jk} B_{kl} \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \sum_{k=1}^l K_{jk} B_{kl} \tag{A2}$$

odakle je

$$\frac{\partial}{\partial K_{j_0 k_0}} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n A_{ij_0} A_{k_0 i} = (\mathbf{B}\mathbf{A})_{k_0 j_0} = (\mathbf{B}\mathbf{A})_{j_0 k_0}^T \tag{A3}$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \tag{A4}$$

3. Dokaz tvrđenja $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \text{tr}(-\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{H}^T \mathbf{K}^T) = -\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{H}^T$

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{K}^T) = \text{tr} \left[\sum_{j=1}^n A_{ij} K_{jl}^T \right] = \text{tr} \left[\sum_{j=1}^n A_{ij} K_{lj} \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} K_{ij} \tag{A5}$$

odakle je

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_{i_0 j_0}} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{K}^T) = \mathbf{A}_{i_0 j_0} \quad (\text{A6})$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{K}^T) = \mathbf{A} \quad (\text{A7})$$

Dodatak B

```
%
%   Simulacija diskretnog Kalmanovog filtera na primeru kosog hica
%

clear
%Period diskretizacije
dt=0.01;
%Vektor vremena
t=[0:dt:1];
%Rezolucija u vremenskom domenu
resolution=length(t);
%Ubrzanje zemljine teže
g=9.81;
%Početna brzina
v0=8;
%Početni ugao
alpha0=pi/4;
%Početni uslovi
x0=[0 v0*cos(alpha0) 0 1];
y0=[0 v0*sin(alpha0) 1 1];

%Kovarijansa šuma na objektu
Q=0.1;
%Kovarijansa šuma mernog sistema
R=0.001;
%Resetovanje slučajne funkcije
randn('seed',0)
%Vektor ulaznog signala
u=ones(1,resolution);
%Vektor šuma na objektu
w = sqrt(0.1)*randn(resolution,2);
%Vektor šuma mernog sistema
v = sqrt(0.001)*randn(resolution,2);

%Matematički model objekta
A=[1 dt; 0 1];
Bx=[0 0]';
By=[0 -g*dt]';
C=[1 0];
D=[0];
ObjectStvarnoX = ss(A,[Bx [1 1]],C,D,dt,'inputname',{'u' 'w'},'outputname',{'x'});
ObjectStvarnoY = ss(A,[By By],C,D,dt,'inputname',{'u' 'w'},'outputname',{'y'});

%Matematički model objekta sa šumom na mernom sistemu
```

```

a = A;
bx = [Bx Bx 0*Bx];
by = [By By 0*By];
c = [C;C];
d = [0 0 0; 0 0 1];
ObjectMerenoX = ss(a,bx,c,d,dt,'inputname',{'u' 'w' 'vx'},...
'outputname',{'x' 'xv'});
ObjectMerenoY = ss(a,by,c,d,dt,'inputname',{'u' 'w' 'vy'},...
'outputname',{'y' 'yv'});

%Generisanje Kalmanovog filtera sa za obe kordinate
[KalmanovFilterX,Lx,Px,Mx] = kalman(ObjectStvarnoX,Q,R);
[KalmanovFilterY,Ly,Py,My] = kalman(ObjectStvarnoY,Q,R);

%Potreban je samo izlaz dok se velicine stanja zanemaruju
KalmanovFilterX= KalmanovFilterX(1,:);
KalmanovFilterY= KalmanovFilterY(1,:);

%Spajanje sistema
ParalelnoX = parallel(ObjectMerenoX,KalmanovFilterX,1,1,[],[]);
ParalelnoY = parallel(ObjectMerenoY,KalmanovFilterY,1,1,[],[]);
%Povratna veza izmedju izlaza iz objekta i ulaza u Kalmanov filter
KonacoX = feedback(ParalelnoX,1,4,2,1);
KonacoY = feedback(ParalelnoY,1,4,2,1);
%Drugi red nije potreban
KonacoX = KonacoX([1 3],[1 2 3]);
KonacoY = KonacoY([1 3],[1 2 3]);

[outX,t,x] = lsim(KonacoX,[w(:,1) v(:,1) u'],t,x0);
[outY,t,y] = lsim(KonacoY,[w(:,2) v(:,2) u'],t,y0);

figure('Color',[1 1 1]);
%plot(t,outX(:,1),'g',t,outX(:,2),'r',t,outX(:,1)+vx,'b')
%plot(t,outY(:,1),'g',t,outY(:,2),'r',t,outY(:,1)+vy,'b')
plot(outX(:,1),outY(:,1),'b',outX(:,2),outY(:,2),'r',outX(:,1)+v(:,1),outY(:,1)+v(:,2)
,'g.')
```

Dodatak C

```

%
% Simulacija proširenog Kalmanovog filtera
%

%Otpor namotaja
Ra = 2;
%Induktivnost namotaja
L = 0.003;
%Konstanta motora
lambda = 0.1;
```

```

%Moment inercije rotora sa teretom
J = 0.002;
%Koeficijent viskoznog trenja rotora sa teretom
B = 0.001;
%Standardne devijacije sumova na objektu i mernom sistemu
StDevUlaza = 0.001;
StDevUbrzanja = 0.05;
StDevMerenja = 0.1;

%Kovarijansa šuma na objektu
Q = [StDevUlaza^2 0 0 0; 0 StDevUlaza^2 0 0; 0 0 StDevUbrzanja^2 0; 0 0 0 0];
%Kovarijansa šuma mernog sistema
R = [StDevMerenja^2 0; 0 StDevMerenja^2];

%Inicijalna vrednost estimacije
P = 1*eye(4);

%Period diskretizacije
dt = 0.0002;
%Period observacije
T = 0.001;
%Trajanje simulacije
tf = 2; % Simulation length

%Inicijalno stanje
x = [0; 0; 0; 0];
%Inicijalna estimacija
xhat = x; % Initial state estimate

%Frekvencija ulaznog signala
w = 2 * pi;
%Kovarijansa objekta u diskretnom domenu
Q = Q * T;
%Koliko se često štampaju rezultati
dtPlot = 0.01;
%Najraniji trenutak snimanja podataka za štampu
tPlot = -inf;

%Inicijalizacija nizova za štampu
%Stvarno stanje
xArray = [];
%Ocenjeno stanje
xhatArray = [];
%Trag kovarijanse greške estimacije
trPArray = [];
%Vreme
tArray = [];

%Simulaciona petlja
for t = 0 : T : tf-T+eps
    %Merenje sa šumom
    %Sum merenja

    y = [x(1); x(2)] + StDevMerenja * randn(2,1);
    if t >= tPlot + dtPlot

```

```

tPlot = t + dtPlot - eps;
%Cuvanje podataka za štamšanje
xArray = [xArray x];
xhatArray = [xhatArray xhat];
tArray = [tArray t];
end

%Simulacija sistema
for tau = 0 : dt : T-dt+eps
    %Podesavanje vremena
    time = t + tau;
    %Upravljacki signali
    ua = sin(w*time);
    ub = cos(w*time);
    %Jednacina objekta
    xdot = [-Ra/L*x(1) + x(3)*lambda/L*sin(x(4)) + ua/L; -Ra/L*x(2) -
x(3)*lambda/L*cos(x(4)) + ub/L;
-3/2*lambda/J*x(1)*sin(x(4)) + 3/2*lambda/J*x(2)*cos(x(4)) - B/J*x(3);
x(3)];
    %Objekat sa sumovima
    xdot = xdot + [StDevUlaza; StDevUlaza; StDevUbrzanja; 0] .* randn(4,1);
    %Stanje
    x = x + xdot * dt;
    %Skracivanje ugla iznad 2pi
    x(4) = mod(x(4), 2*pi);
end

%Upravljacki signali
ua = sin(w*t);
ub = cos(w*t);

%Jakobijeva matrica
Jf= [-Ra/L 0 lambda/L*sin(xhat(4)) xhat(3)*lambda/L*cos(xhat(4));
0 -Ra/L -lambda/L*cos(xhat(4)) xhat(3)*lambda/L*sin(xhat(4));
-3/2*lambda/J*sin(xhat(4)) 3/2*lambda/J*cos(xhat(4)) -B/J ...
-3/2*lambda/J*(xhat(1)*cos(xhat(4))+xhat(2)*sin(xhat(4)));
0 0 1 0];

%Matrica observacije
C = [1 0 0 0; 0 1 0 0];

%Kalmanovo pojačanje
K = P * C' * inv(C * P * C' + R);

%Podesavanje estimacije
deltax = [-Ra/L*xhat(1) + xhat(3)*lambda/L*sin(xhat(4)) + ua/L;
-Ra/L*xhat(2) - xhat(3)*lambda/L*cos(xhat(4)) + ub/L;
-3/2*lambda/J*xhat(1)*sin(xhat(4)) + 3/2*lambda/J*xhat(2)*cos(xhat(4)) -
B/J*xhat(3);
xhat(3)] * T;

%Posteriori stanje
xhat = xhat + deltax + K * (y - [xhat(1); xhat(2)]);

%Skracivanje ugla iznad 2pi

```



```

xhat(4) = mod(xhat(4), 2*pi);

% Update the estimation error covariance.
P = Jf * ((eye(4) - K * C) * P) * Jf' + Q;
end

% Plot the results
close all;
figure; set(gcf,'Color','White');

subplot(2,2,1); hold on; box on;
plot(tArray, xArray(1,:), 'b', 'LineWidth', 2);
plot(tArray, xhatArray(1,:), 'r', 'LineWidth', 2)
%plot(tArray, xArray(1,:), 'g.', 'LineWidth', 2)
set(gca,'FontSize',12); ylabel('Struja a (A)');

subplot(2,2,2); hold on; box on;
plot(tArray, xArray(2,:), 'b', 'LineWidth', 2);
plot(tArray, xhatArray(2,:), 'r', 'LineWidth', 2)
set(gca,'FontSize',12); ylabel('Struja B (A)');

subplot(2,2,3); hold on; box on;
plot(tArray, xArray(3,:), 'b', 'LineWidth', 2);
plot(tArray, xhatArray(3,:), 'r', 'LineWidth', 2)
set(gca,'FontSize',12);
xlabel('Vreme (s)'); ylabel('Ugaona brzina (rad/s)');

subplot(2,2,4); hold on; box on;
plot(tArray, xArray(4,:), 'b', 'LineWidth', 2);
plot(tArray,xhatArray(4,:), 'r', 'LineWidth', 2)
set(gca,'FontSize',12);
xlabel('Vreme (s)'); ylabel('Pozicija (rad)');
legend('Stvarno', 'Ocenjeno');

```